



Optimización dinámica aplicada al acuífero de San Luis Potosí

Dynamic optimization applied to the San Luis Potosi aquifer

Leobardo Pedro Plata Pérez *§
Noraima Eréndira Rangel Sánchez
Pedro Isidoro González Ramírez

Información del artículo

Recibido:
24 agosto 2020

Aceptado:
11 julio 2022

Clasificación JEL:
D24; C51; C61; Q21;
Q25

Palabras clave:

extracción óptima de agua; administración de acuíferos; optimización dinámica; demanda de agua; costos de extracción de agua; tarificación; San Luis Potosí

Resumen

Este trabajo usa teoría de control óptimo para determinar el nivel de extracción de agua, de un acuífero, de manera racional. La función objetivo evalúa el valor presente del beneficio social neto de la explotación a lo largo del tiempo. En el beneficio intervienen la demanda y los costos de suministrar agua. La restricción representa la dinámica de la cantidad de agua en el acuífero, dependiendo de los niveles extracción y recarga. El modelo se aplica al acuífero 2411 de San Luis Potosí utilizando información empírica del consumo de agua de la población perteneciente a la zona conurbada de la capital del estado. La condición inicial se deja como parámetro para analizar la posibilidad tanto de óptimo interior como de óptimo de esquina. El óptimo interior recomienda un nivel de extracción de 42,854 miles de metros cúbicos y un precio de 0.00003658 pesos por metro cúbico de agua. El acuífero se encuentra actualmente muy sobreexplotado. Para mantener la sustentabilidad del acuífero se recomienda revisar la normativa de las tarifas y mejorar la micro medición de los consumos para construir un modelo más preciso.

* Universidad Autónoma de San Luis Potosí, § lplata@uaslp.mx

ISSN Electrónico: 2448-8402 | ISSN Impreso: 1870-221X | ©2022 Los autores



Article information	Abstract
Received: 24 august 2020 Accepted: 11 july 2022	Optimal control theory is used to determine the level of water extraction, from an aquifer, in a rational way. The exploitation of the aquifer generates a net social benefit that represents the objective function. The benefit involves the demand and the costs of supplying water. The restriction represents the dynamics of the amount of water in the aquifer, depending on the levels of extraction and recharge. The model is calibrated with data on the 2411 aquifer of San Luis Potosi. Empirical information on water consumption of the population belonging to the metropolitan area of the state capital. The initial condition is left as a parameter in order to study the possibility of both an interior solution or a corner solution. The optimum interior recommends an extraction level of 42.854 thousand cubic meters and a price of 0.00003658 pesos per cubic meter of water. The aquifer is currently highly overexploited. To maintain the sustainability of the aquifer, it is recommended to review the tariff regulations and improve the micro measurement of consumption to build a more accurate model.
JEL Classification: D24; C51; C61; Q21; Q25	
Keywords: Optimal water extraction; Aquifer management; Dynamic optimization; Demand for water; Water extraction costs; Pricing; San Luis Potosi	

Introducción

En todo el mundo, el agua contenida en los acuíferos representa un recurso vital para la sobrevivencia de la especie humana. El agua es usada como insumo en diversas actividades productivas. Además, es vital para el aseo y consumo de los individuos en poblaciones y ciudades. La escasez de agua es un problema generalizado, debido a la sobreexplotación de los acuíferos. Diversos y múltiples factores confluyen en esta sobreexplotación, desde la ubicación del acuífero en zonas con poca recarga hasta el uso de tecnologías anticuadas; el aumento del volumen de consumo debido al crecimiento de la población, sobre todo en ciudades donde aumenta la industrialización y no hay una planificación adecuada. Otros factores importantes son los problemas en la regulación y cobro de tarifas, sitios clandestinos de extracción, desperdicio con fugas de agua por falta de mantenimiento, carencia de infraestructuras de captación en la temporada de lluvias, ubicación lejana de la fuente de agua, clima seco con grandes asentamientos humanos, problemas en la micro medición o mediciones irregulares a los grandes consumidores. Un factor muy relevante es el desperdicio debido a la falta de cultura ecológica. En general, se puede decir que se trata de un problema de planificación y control insuficiente, rebasado por necesidades y exigencias de corto plazo, sin considerar la sustentabilidad ni el largo plazo.

En la literatura del tema hay una diversidad de estudios desde diferentes ópticas. Hay estudios de carácter técnico sobre características físicas de los acuíferos, calidad del agua y duración de los mismos según la explotación a que son sometidos. Destacan los estudios que usan técnicas de optimización para analizar el uso racional del recurso. Más abajo se comentan algunos. También hay trabajos sobre estimación de demanda de agua a diferentes niveles y en diversas zonas geográficas. El tema del cobro del servicio y las tarifas para los diferentes usos y tipos de consumidores también ha sido estudiado.

Entre los estudios técnicos destaca el importante trabajo de Balek (1983, 1988) que brinda conceptos y teoría para estimar la recarga natural de los acuíferos. En Simmers (2013) se complementa el trabajo original y aparecen nuevos enfoques del tema. Siempre es importante conocer los niveles de agua a los que puede llegar un acuífero en determinado tiempo. Esto resulta muy importante para analizar el tiempo de duración de un acuífero en función de la cantidad de agua extraída del mismo. Los problemas ocasionados por la escasez de agua en los cultivos de trigo son señalados en Trnka et. al. (2019).

García Sánchez (2016) propone realizar una gestión adecuada de los acuíferos a través de un modelo llamado RENATA (Recarga Natural de Acuíferos). Presenta una definición y una actualización del estado hidrogeológico de dos acuíferos de la Provincia de Alicante en España. Guerrero-Martínez et. al. (2018) presentan un estudio sobre recarga natural para el caso de Aguascalientes. En el caso de San Luis Potosí, se cuenta con muy buena información sobre las condiciones físicas del acuífero en gracias a Segovia, Medellín, Moreno y Ávalos (2012), quienes analizan las condiciones físicas del acuífero y su oferta de agua, además estiman el tiempo de extinción bajo las condiciones de esa época. Carrillo-Rivera y Armienta (1989) analizan la contaminación inorgánica del agua del valle de San Luis Potosí. La calidad física y química del agua destinada al consumo humano se estudia en Ávalos, Alcántara y Luna (2008), también para el caso de San Luis Potosí.

Existen organismos oficiales que realizan estudios técnicos y cuentan con estadísticas sobre el tema del agua. Entre ellos destacan la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), el Instituto Mexicano de la Tecnología del Agua (IMTA) y la propia Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT). Se recomienda revisar el trabajo de Escolero, Gutiérrez y Mendoza (2017) publicado por el IMTA y la UNAM. El estudio describe las condiciones físicas de varios acuíferos de la República Mexicana. Sugiere aplicar algunas técnicas para el Manejo de Recarga de Acuíferos (MAR) y evitar la sobreexplotación de los mismos. Se describen ejemplos de acuíferos en México y el mundo. En CONAGUA y SEMARNAT (2014) aparece el plan de desarrollo hídrico como parte del Plan Nacional de Desarrollo. En

CONAGUA Y SEMARNAT (2018a) aparecen diversos datos estadísticos acerca del tema del agua en el caso de México.

Además de los estudios sobre las condiciones físicas e hidrológicas de los acuíferos, son también muy importantes los estudios sobre la demanda de agua y las tarifas para cobrar el consumo de la misma.

Entre los estudios que estiman demanda de agua destacamos el de Scheierling, Loomis y Young (2006) donde se calculan elasticidades de precio y demanda de agua para irrigación. García-Salazar y Mora-Flores (2008) estiman funciones de demanda del sector residencial de la Comarca Lagunera. Analizan los factores que influyen en la demanda y el papel de los precios. Concluyen que para reducir el consumo de agua se requiere incrementar el precio de la energía eléctrica. Encuentran que el costo de operación cobrado a través de la tarifa es bastante alto. Se destaca también el estudio de Soto, Ramírez-Fuentes y Maya (2012), realizado conjuntamente por el Centro de Investigación y Docencia Económicas, (CIDE A.C.) y la CONAGUA. Estiman factores y demanda de agua potable para el consumo doméstico en México. Usan una muestra de más de 6,500 viviendas pertenecientes a las localidades más pobladas del país. Toman en cuenta como factores al clima, los precios y los ingresos de los hogares. Plata y Rodríguez (2020) analizan la demanda y el costo de mantenimiento de un pozo en una comunidad de Mexquitic en San Luis Potosí. Se usa la teoría de bancarrota para proponer tarifas alternativas que mejoren la eficiencia en el cobro actual de tarifas.

Hay diferentes contextos para abordar el tema de las tarifas cobradas por el suministro de agua. En principio, la tarifa no solo depende de la cantidad de metros cúbicos consumidos de agua, es importante también el uso que se le da a la misma, la característica específica del consumidor, etc. Cázares Rivera (2007) presenta un comparativo de tarifas considerando los costos en los que incurre cada uno de los organismos operadores de la zona frontera México-EUA. El trabajo emplea índices para comparar tarifas, discute aspectos relacionados con la eficiencia técnica y comercial de los organismos operadores. Un trabajo interesante sobre precios racionales para el cobro del agua subterránea, en una situación de población creciente, es el de Amigues, Gaudet y Moreaux (1997).

El uso racional del consumo de agua ha sido también bastante estudiado. Utilizando métodos de optimización destacan los trabajos de Cabrera-Estupián y Dilla-Salvador (2011). A través de un modelo de programación lineal, revisando la cantidad extraída de agua de los acuíferos, proponen una solución para evitar la intrusión salina y satisfacer la demanda de agua de acuerdo con la recarga del acuífero. Amir y Fisher (1999), construyen un modelo de programación lineal para apoyar decisiones de planificadores en la producción agrícola, a nivel distrital y nacional. Encuentran la combinación óptima de actividades de consumo de agua que maximiza el ingreso neto de la

producción agrícola, dadas las demandas de agua a diferentes precios. Medellín, Mendoza, Howitt y Lund (2009) ofrecen un método basado en programación matemática para determinar la demanda económica del agua para uso agrícola.

Zilberman (1982) expone la metodología de optimización a través de teoría de control. Comenta que, para alimentar el modelo, se requiere una buena infraestructura de bases de datos que en aquel momento no se tenían. Señala también que, con el paso del tiempo, la tecnología iría avanzando y se podría aplicar este tipo de modelos a problemas reales arrojando una importante herramienta de predicción de la realidad, considerando aspectos de distribución y equidad. Roumasset y Wada (2010) consideran también la optimización dinámica usando teoría de control óptimo. La función objetivo incluye, en la función de costos, un factor para medir el costo de la desalinización. La recarga del acuífero se maneja como una función del nivel del mismo. Concluyen que, bajo ciertas circunstancias del modelo, la solución óptima es el valor mínimo de capacidad del acuífero. Rubio, Martínez y Castro (1994) maximizan el beneficio social de la extracción de agua de un acuífero a través de un modelo de teoría de control óptimo. En el modelo son fundamentales dos curvas: la de demanda de agua y la de costos de extracción del acuífero. El modelo considera también la evolución de las reservas del acuífero en función de la recarga natural y los niveles de extracción. La gestión óptima de las aguas subterráneas es abordada por Pardo, Castro y Martínez (1998). Comparan el sistema de regulación con el sistema no regulado en condiciones de libre mercado. La misma comparación es presentada para el caso de un acuífero de propiedad comunal por Rubio y Casino (2001). Los efectos de la demanda de largo plazo y la recarga, en la administración de un acuífero bajo condiciones de incertidumbre, es analizado por Rubio y Castro (1996). Recientemente, Zurita (2021) presenta un modelo de optimización dinámica en un contexto de turismo sustentable.

Estudios de optimización dinámica relacionados al uso del agua no han sido realizados hasta ahora, en la literatura consultada, para el caso de San Luis Potosí. En este trabajo estimamos y aplicamos un modelo de control óptimo con base en Rubio et. al. (1994). Se estima primero tanto una función de demanda como una función de costos medios. Ello permite postular una función dinámica de beneficios. El problema de control óptimo maximiza el valor presente de los beneficios, condicionado a una ecuación diferencial. En ella se describe la evolución de las reservas del acuífero en función de la recarga natural, los niveles de extracción y desperdicio de agua. El nivel de extracción se asocia con la variable de estado, y el precio asociado mediante la demanda constituye indirectamente la variable de control. El *stock* de agua está acotado entre un nivel mínimo y un máximo para garantizar la existencia

óptima. El modelo y sus variables se explican con detalle en la sección de metodología. El trabajo pretende dar respuesta a las siguientes interrogantes: ¿se puede estimar los costos relacionados con la oferta de agua y la demanda de agua en San Luis Potosí?, ¿se puede calcular un nivel de extracción y precio asociado al nivel de uso del recurso que maximice el beneficio social y mantenga sustentablemente el acuífero?, ¿el marco legal actual apoya a la vida eficiente del acuífero?

En el planteamiento se deja libre la condición inicial de extracción para permitir que la extracción óptima pueda estar en el interior o en la esquina del intervalo del *stock* de agua. La solución de la optimización permite calcular el nivel de extracción eficiente y el precio asociado con ese nivel. En los resultados se encuentra que el equilibrio es siempre condicionalmente estable y depende del nivel de extracción inicial. Las condiciones de transversalidad permiten caracterizar la trayectoria estable en cada caso. El caso más interesante es, tal vez, el de óptimo interior, para los fines iniciales de esta investigación. Se encuentra un nivel ideal de explotación de 42,854 miles de metros cúbicos y un precio $p=0.00003658$ pesos por metro cúbico de agua. Este nivel de extracción se puede interpretar, dados los costos y demanda estimada, como el ideal sustentable. En un entorno de este nivel, los precios se ajustarían asintóticamente al precio de equilibrio. Las soluciones de esquina y su interpretación se comentan con detalle en la sección de resultados.

En la sección 2 se describe brevemente el marco regulatorio y las condiciones de los acuíferos en San Luis Potosí. En la sección 3 se describe la metodología empleada para estimar la demanda, los costos medios y la optimización realizada. En la sección 4 se comentan los resultados y las limitaciones del estudio; además, se brindan algunas conclusiones y sugerencias para un trabajo futuro. Al final se incluye un apéndice con detalles de cálculos de la optimización.

1. Marco legal y acuíferos en San Luis Potosí

La Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos establece un marco para la administración de los recursos naturales. Los artículos 27, 115 y 124 fundamentan la regulación de las aguas. La Ley de Aguas Nacionales se deriva de los lineamientos constitucionales. Esta ley se aprobó en 1992 y ha sido modificada, mediante al menos seis decretos, con la intención de mejorarla y adaptarla a nuevas situaciones. En términos generales la ley rige el desarrollo, uso y protección de los recursos hídricos en todo el país. Con el fin de implementar los mandatos constitucionales, se crea un organismo federal específico para administrar y vigilar el desarrollo de los recursos hídricos. Este organismo conocido inicialmente como CNA se conoce hoy como CONAGUA. Una de las actualizaciones de la Ley de Aguas Nacionales

aparece en el DOF (2016). La versión legal actual de la regulación nacional se denomina Ley de Aguas Nacionales y su Reglamento y aparece en CONAGUA (2018c).

A partir de la reglamentación federal se establecen diversos Consejos de Cuenca a lo largo del país. Estos son los portavoces ante la CONAGUA de las condiciones y necesidades de la región que representan. Son los encargados de analizar las condiciones específicas de cada región con el propósito de mejorar la calidad del agua ofrecida a las poblaciones y lograr un manejo integrado y sustentable en cuencas y acuíferos. En 2012 los gobiernos de Nuevo León, Tamaulipas, San Luis Potosí y Zacatecas establecen un acuerdo denominado Reglas Generales de Integración, Organización y Funcionamiento del Consejo de Cuenca del Altiplano. El documento aparece en la página de Internet de la CONAGUA.

En consistencia con la legislación nacional, cada estado de la federación aprovecha su soberanía y tiene la facultad de emitir leyes y reglamentos específicos para su región. Cada uno expide las bases para la prestación del servicio público de agua potable, drenaje, alcantarillado, tratamiento y disposición de aguas residuales.

Para el caso que nos compete, en DOPSL (2016) aparece la Ley de Aguas de San Luis Potosí. El documento manifiesta explícitamente la escasez del agua, su desperdicio y la falta de conciencia por parte de la población para cuidarla de forma eficiente. Señala la importancia de conservar el vital líquido para las futuras generaciones.

A partir de las leyes se establecen políticas, normas y reglamentos a seguir para llevar a cabo la preservación del vital líquido. Un tema muy relevante es la regulación sobre la explotación de los acuíferos. Cuando una persona física o moral solicita la explotación de aguas subterráneas, se le solicitan mapas, dimensiones, uso para el cual va a ser aprovechado el acuífero, entre otros. La CONAGUA o la Comisión Estatal de Agua del Estado de San Luis Potosí (CEA) tienen la autoridad para evaluar la solicitud, deliberar con base a la disponibilidad media de agua en la zona a la que pertenece el acuífero en cuestión, para determinar si se otorga el permiso o no.

En el marco legal se considera también la determinación de las tarifas que se cobran a los usuarios del servicio de agua potable. En el Periódico Oficial del Gobierno del Estado Plan de San Luis (POGEPSSL), el Decreto 594 establece la metodología para el cálculo de cuotas y tarifas para los Servicios Públicos de Agua Potable, Drenaje, Alcantarillado, Tratamiento y Disposición de sus Aguas Residuales en el estado de San Luis Potosí. El documento aparece en POGEPSSL (2006). El Decreto considera, además de la cantidad de agua demandada entregada, costos de producción como la energía eléctrica, gastos

de operación, el incremento en el INPC (Índice Nacional de Precios al Consumidor) que impacta en los sueldos y prestaciones, depreciaciones, inversiones en la infraestructura para la extracción y costos financieros. Asimismo, en POGEPSL (2016) aparece el Decreto 409 donde se precisan aspectos considerados en el Decreto 594. Aparece la Ley de Cuotas y Tarifas para la Prestación de Servicios Públicos del Organismo Operador, INTERAPAS, en el caso de la zona conurbada de la capital de San Luis Potosí. Se describen las cuotas fijas y de servicio medido, se clasifican las mismas de acuerdo al tipo de zona ya sea popular, económica o residencial. Se puntualiza esta información porque constituye la base legal del ejercicio realizado en este trabajo.

El marco legal en cualquier país es sumamente importante para regular y garantizar el suministro del vital líquido a los hogares. Además de la regulación sobre la determinación de las tarifas, también se regula el mantenimiento y buen estado del acuífero bajo explotación y se señalan directrices para renovar o lograr concesiones de explotación, entre otros.

El agua que consumen los hogares se genera a través del ciclo hidrológico natural. El ciclo representa los cambios de estado que sufre el agua de nuestro planeta, de acuerdo con las condiciones del entorno climatológico de cada país, región o zona. Dentro de este proceso, a través de la caída de lluvia se recargan los acuíferos, de donde procede una buena parte del agua consumida. También puede provenir de deshielos o aguas superficiales recolectadas mediante diversos procesos. Destaca el caso de la que proviene de ríos, presas o lagunas. En CONAGUA y SEMARNAT (2018a) aparecen importantes estadísticas para el caso de México. El 6.4%, aproximadamente, de la precipitación total representa la recarga media de los acuíferos en México. En lo que sigue se describe el contexto actual del agua en San Luis Potosí, demarcación del objeto de estudio de este trabajo.

Ya se ha señalado que la gestión principal del agua en México corresponde a la CONAGUA. La cual ha dividido al país en 13 regiones hidrológico-administrativas. La capital de San Luis Potosí pertenece a la región VII, Cuencas Centrales del Norte. La región de la Huasteca potosina, que incluye a Ciudad Valles pertenece a la región IX denominada Golfo Norte. Asimismo, CONAGUA subdivide estas 13 regiones de la república mexicana en 653 unidades administrativas llamadas acuíferos. Estos constituyen la principal fuente de abastecimiento en zonas áridas y semiáridas en nuestro país, como es el caso de San Luis Potosí. Este tipo de zonas representan aproximadamente el 50% del territorio nacional. Los acuíferos soportan más de la tercera parte de la superficie regada para cultivos y abastecen aproximadamente el 75% del volumen utilizado en las ciudades. Una muy buena referencia para ver este tipo de datos estadísticos es CONAGUA y SEMARNAT (2018a).

Existen diversos problemas asociados con la explotación de los acuíferos. Entre ellos, la sobreexplotación, la contaminación o el incremento del precio de la energía eléctrica para extraer el agua, entre otros. La no atención temprana de estos problemas genera el deterioro o la extinción de los acuíferos.

La sobreexplotación de los acuíferos se mide como el cociente de la cantidad de agua extraída entre el nivel de recarga que tiene el acuífero de forma anual. Cuando este cociente es mayor a uno el acuífero se considera sobreexplotado. De los 653 acuíferos en México, el 16.4% se encuentran en grado de sobreexplotación, que va desde el 100% hasta el 400%. Para San Luis Potosí los acuíferos sobreexplotados representan el 47% del total. El acuífero al que pertenece la capital del estado presenta un 200% de sobreexplotación según datos del reporte presentado en CONAGUA y SEMARNAT (2018b).

Tabla 1
Disponibilidad media anual de agua subterránea de los acuíferos de San Luis Potosí en millones de metros cúbicos anuales

Nombre del acuífero	DMA	DNC	R	VCAS	Región
2411 San Luis Potosí	(76.4215)	-	78.1	154.5205	Centro
2402 El Barril	(65.5290)	-	31.6	88.5693	Altiplano
2408 Villa de Arista	(55.8843)	-	48.2	103.3164	Altiplano
2413 Matehuala - Huizache	(39.1294)	-	31.5	48.1336	Altiplano
2403 Salinas de Hidalgo	(32.5006)	-	16.7	27.4647	Altiplano
2417 Santa María del Río	(21.5930)	-	3.7	17.9748	Centro
2405 Ahualulco	(6.7555)	-	10.9	17.6555	Centro
2401 Vanegas - Catorce	(6.2174)	-	29.3	30.3498	Altiplano
2407 Cedral - Matehuala	(3.3532)	1.3	17.5	19.5492	Altiplano
2412 Jaral de Berrios - Villa de Reyes	0.9617	1.3	132.1	129.5236	Centro
2404 Santo Domingo	1.7116	-	21.4	13.8191	Altiplano
2406 Villa de Arriaga	2.2128	-	4.8	1.0846	Centro
2410 Buenavista	3.2977	-	27.1	18.5326	Zona Media
2414 Cerritos - Villa Juárez	5.7444	50.4	72.7	15.8754	Zona Media
2416 San Nicolás Tolentino	7.6398	18.6	32.9	5.6312	Zona Media
2409 Villa Hidalgo	10.4486	-	20.6	7.9864	Altiplano
2419 Tamuín	67.3462	290.2	370.1	6.2694	Huasteca
2415 Río Verde	68.8431	251.4	415.8	92.0308	Zona Media
2418 Huasteca Potosina	91.0203	541.5	668.2	26.2837	Huasteca

Fuente: elaboración propia con información de (CONAGUA, 2018b).

En la tabla 1 se muestra la disponibilidad media de agua (DMA) que es el resultado de restarle a la recarga total, la descarga natural comprometida y los volúmenes concesionados. La descarga natural comprometida (DNC) está formada por los volúmenes de agua procedentes de manantiales o de caudal

base de los ríos alimentados por el acuífero. Para el acuífero San Luis Potosí la descarga natural comprometida se considera prácticamente nula. La recarga total media anual (R) corresponde a la suma de todos los volúmenes que ingresan al acuífero en forma de recarga natural más la recarga inducida. La columna de VCAS corresponde a los volúmenes anuales de agua asignados, o concesionados, por CONAGUA mediante títulos inscritos en el Registro Público de Derechos de Agua (REPGA). La tabla 1 muestra la situación de los 19 acuíferos que pertenecen al estado de San Luis Potosí. Los acuíferos cuya DMA es negativa, aparecen en la primera columna de la tabla 1, con los números entre paréntesis. Generalmente se localizan en zonas áridas y semiáridas, por lo cual no cuentan con manantiales o ríos alimentados por el acuífero. El Estado de San Luis Potosí se divide en cuatro zonas o regiones de similitud geográfica: Zona Centro, Zona de Altiplano, Zona Media y Zona Huasteca. Los acuíferos sobreexplotados se encuentran generalmente en las dos primeras zonas. En las zonas Media y Huasteca aún no hay problemas de escasez de agua.

El Gobierno Federal ha establecido estrategias, en el Plan Nacional de Desarrollo del Programa Hídrico 2013-2024, que intentan mejorar la situación. Una de sus estrategias pretende ajustar las concesiones y asignaciones, tanto a la oferta y disponibilidad real de agua como a las prioridades nacionales. Entre otras estrategias, se actualizan los decretos de veda, reserva y zonas reglamentadas, se ordena la explotación y se ponen acciones para incrementar la recarga de los acuíferos.

Figura 1
Ubicación del acuífero 2411 de San Luis Potosí



Fuente: elaboración propia con base en Google Maps.

En la figura 1 se muestra con cierto detalle el área geográfica donde se ubica el acuífero 2411 de San Luis Potosí, objeto de estudio de este trabajo. Se puede observar que su extensión abarca los municipios de San Luis Potosí, Soledad de Graciano Sánchez y parte de Mexquitic de Carmona y Cerro de San Pedro.

En la tabla 2 se muestran los principales usos del agua del acuífero 2411 para la actividad económica, en cifras relativas. Se observa que el acuífero se usa mayormente para abastecer el consumo doméstico de los hogares.

Tabla 2
Usos del agua del acuífero 2411 de San Luis Potosí

Usos del agua	%
Público Urbano	66%
Agrícola	20%
Industrial	8%
Servicios	5%
Pecuario	1%
	100%

Fuente: elaboración propia con información de CONAGUA y SEMARNAT (2018b).

A partir de observar el déficit que presenta el acuífero de San Luis Potosí, y otros del norte del país, surge de manera natural la pregunta: ¿cómo es que se ha llegado a esa condición de sobreexplotación? Parece bastante claro que el incremento acelerado de la concentración de la población en zonas urbanas, el desarrollo tecnológico y el económico, son factores que contribuyen a un mayor consumo de agua. La CONAGUA señala que en el norte del país el clima afecta la disponibilidad del recurso. En los últimos años un grupo de agricultores, con capacidad económica importante, se expandió al norte del país construyendo, de forma incontrolada, pozos para su actividad económica. Esto ha incrementado considerablemente la situación de sobreexplotación de los acuíferos. Las reglamentaciones de CONAGUA tienden al cuidado y preservación del recurso, pero a veces los intereses económicos se sobreponen.

2. Metodología

En esta sección se explica y estima el modelo de control óptimo desarrollado por Rubio, Martínez y Castro (1994). El modelo es dinámico, pues sus variables se mueven a lo largo del tiempo. Plantea un problema de optimización dinámica para calcular la cantidad ideal de agua extraída de un acuífero, de forma que satisfaga los requerimientos de la demanda y sea viable,

tanto desde el punto de vista económico como ecológico. El modelo supone que la demanda de agua responde a leyes de mercado, hay precios que varían en función del agua demanda. También hay unos costos ligados a la extracción y provisión del agua. Con la demanda inversa y los costos promedio se calcula el beneficio neto social del acuífero. Como las variables son dinámicas, se utiliza una tasa de descuento para calcular el valor presente del beneficio social. Esto constituye la función objetivo de la optimización. La restricción de la optimización se plantea mediante una ecuación diferencial que describe los cambios de la cantidad de agua existente en el acuífero, en función esencialmente de la extracción y la recarga de agua que proviene de las lluvias.

El modelo formal aparece descrito y más explicado en las ecuaciones (7) y (8) más abajo. Para la aplicación empírica del modelo se requiere hacer una estimación econométrica, tanto de la demanda como de los costos.

Para estimar la demanda de agua se extrajo información relativa al consumo de agua de la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) para San Luis Potosí y Soledad de Graciano Sánchez en el año 2014. Para la obtención de costos de extracción se utilizó información contable del Organismo Operador Intermunicipal Metropolitano de Agua Potable, Alcantarillado, Saneamiento y Servicios Conexos de los Municipios de Cerro de San Pedro, San Luis Potosí y Soledad de Graciano Sánchez (INTERAPAS). Las características físicas del acuífero se obtuvieron de la actualización de disponibilidad media de agua del año 2018 reportado en CONAGUA y SEMARNAT (2018b). Con los datos señalados se tiene la base para la calibración del modelo. A continuación, se explican con mayor detalle las estimaciones realizadas.

2.1 Estimación de la función de demanda

Los principales factores que influyen en el consumo de agua doméstica son: precio, tamaño del hogar, ingreso familiar, clima y disponibilidad de drenaje conectado a la red pública. Se realizó un ejercicio similar al reportado por Soto, Ramírez y Maya (2012). Los datos empleados provienen de la ENIGH 2014. Como el diseño de la muestra es probabilístico, los resultados obtenidos se generalizan a toda la población bajo estudio en San Luis Potosí.

La tabla 3 presenta un resumen que describe la información utilizada de la ENIGH 2014. Aparece el número de viviendas, los metros cúbicos consumidos y el precio pagado por agua en pesos en 2014, por municipio. Para la estimación de la demanda se tomaron en cuenta 207 viviendas. La muestra de la encuesta cuenta con 608 registros en total, de los cuales 380 son urbanos y 220 rurales. El estudio considera solamente los urbanos pertenecientes al acuífero bajo análisis, porque cuentan con recibo de agua y el servicio es suministrado a través de un organismo operador o del municipio. Además,

cuentan con drenaje conectado a la red pública. Los municipios no considerados presentan cifras de precio pagado muy bajo y sin variaciones, lo que no permitía determinar el consumo de agua.

La encuesta presenta el importe total pagado por el recibo de agua. Esta cifra incluye el precio pagado por los metros cúbicos consumidos de agua más impuestos, mantenimiento, drenaje, alcantarillado y otros cargos. Para poder despejar el precio pagado por el consumo de metros cúbicos de agua se identificaron, en cada uno de los organismos operadores de los municipios, los porcentajes o cuotas fijas que correspondían a estos rubros. Dicha información se obtuvo del Periódico Oficial del Gobierno del Estado "Plan de San Luis" vigente al 2014. Se consideró también el descuento a las personas de la tercera edad, para poder reflejar el consumo efectivo sin el descuento. La frecuencia de pago del recibo en más del 70% de los datos se encuentra de forma bimestral. Para los municipios donde se cobra de forma mensual, se calcularon los metros cúbicos consumidos mensualmente y se duplicaron para obtener el consumo bimestral. En la tabla 3 se puede observar que los municipios de San Luis Potosí y Soledad de Graciano Sánchez representan el 74% del precio pagado y el 66% de los metros cúbicos consumidos.

Tabla 3
Número de viviendas, consumo en metros cúbicos y precio pagado por municipio, a pesos constantes de 2014

Municipio	Número de viviendas	%	Metros cúbicos	%	Precio pagado de agua	%
Ciudad Valles	20	10%	730	10%	\$ 3,708	7%
Matehuala	27	13%	859	12%	\$ 5,880	11%
San Luis Potosí	104	50%	3,769	51%	\$ 29,889	58%
Santa María del Río	10	5%	385	5%	\$ 963	2%
Soledad de Graciano Sánchez	33	16%	1,175	16%	\$ 8,154	16%
Tamazunchale	13	6%	425	6%	\$ 2,904	6%
Total	207	100%	7,344	100%	\$ 51,497	100%

Fuente: elaboración propia con información de la ENIGH 2014.

Con la información proporcionada por la ENIGH 2014 se puede estimar el ingreso de las viviendas. La tabla 4 presenta la información del ingreso mensual de las viviendas por municipio y sexo. Se considera el ingreso corriente, proveniente de ingresos por trabajo, rentas, transferencias, estimación del alquiler y otros ingresos. Dicho ingreso ya considera pagos extraordinarios como el aguinaldo, utilidades, entre otros. Es importante considerar el ingreso anual total de la familia para evitar que afecte el consumo de agua estimado.

Tabla 4
Ingreso promedio mensual por municipio y sexo
(Pesos constantes 2014)

Municipio	Masculino	Femenino
Ciudad Valles	\$ 10,757	\$ 9,726
Matehuala	\$ 12,615	\$ 10,119
San Luis Potosí	\$ 18,777	\$ 15,087
Santa María del Río	\$ 14,987	\$ 15,301
Soledad de Graciano Sánchez	\$ 11,203	\$ 7,958
Tamazunchale	\$ 9,440	\$ 13,008

Fuente: elaboración propia con información de la ENIGH 2014

Otras características de la muestra de hogares encuestados son las siguientes: el 85% pertenece a la clase media alta y media baja, el 70% cuenta con dotación diaria de agua, el 98% cuenta con medidor de luz, el 54% tiene bomba de agua, 86% tinaco y 53% cisterna.

Otras variables necesarias para la estimación de la curva de demanda son la energía eléctrica, la precipitación pluvial y la temperatura. Para la obtención del consumo de energía eléctrica que provee la Comisión Federal de Electricidad (CFE) se consideró la misma encuesta de la ENIGH. Esta proporciona información sobre el último recibo de pago, correspondiente a la tarifa del mes de septiembre de 2014 obtenida de CFE (2014). Se contemplan tres niveles de consumo: hasta 150 kwh (kilowatt-hora), hasta 280 kwh y el excedente, para obtener el precio del kwh promedio. Al precio pagado por energía eléctrica se le descontó el Impuesto al Valor Agregado (IVA) y así se despejó el precio pagado por energía eléctrica.

Para obtener la precipitación pluvial y la temperatura se usaron datos de Weather Spark (2019). Se consideraron los promedios de los meses de junio, julio, agosto y septiembre que coinciden con la fecha del recibo reportado en la ENIGH.

La especificación funcional simplificada de la demanda de agua puede plantearse, entonces, con la ecuación (1). La tabla 5 describe el significado de las variables que aparecen en la forma funcional.

$$Q = f(P, I, TEMP, CE, PMA) \quad (1)$$

Tabla 5
VARIABLES Y FUENTE PARA ESTIMAR LA DEMANDA DE AGUA

Variable	Descripción	Fuente
Q	Miles de metros cúbicos consumidos bimestralmente de agua	ENIGH
P	Precio por metro cúbico de agua	ENIGH y Periódico oficial del Gobierno del Estado de San Luis Potosí
I	Ingreso familiar mensual	ENIGH
$TEMP$	Temperatura media anual	(Weather Spark, 2019)
CE	Consumo de Energía Eléctrica	CFE
PMA	Precipitación media anual	(Weather Spark, 2019)

Fuente: elaboración propia con base en Soto et. al. (2012).

Para la estimación efectiva de la demanda se plantearon dos modelos. En el modelo (1) se tomaron en cuenta las variables de metros cúbicos consumidos, precio por metro cúbico, ingreso familiar, temperatura media anual, consumo de energía eléctrica y precipitación media. Sin embargo, las dos últimas variables no resultaron significativas por lo que se decidió realizar un nuevo modelo sin ellas. En el modelo (2) las tres primeras variables resultan significativas. Se observa que en general, un incremento del 10% en el precio marginal del agua, manteniendo todo lo demás constante, puede reducir la demanda en 13.88%. Adicionalmente, se observa que un incremento de 10% en el ingreso puede aumentar la demanda de agua en un 13.80%. Se encuentra que tanto la variable precio como el ingreso tienen los signos esperados y son significativas al 99% y 95% respectivamente. Por otro lado, se observa que la temperatura es significativa al 90%. Así, la función de demanda estimada se representa en la ecuación (2). La tabla 6 reporta las estimaciones de las dos especificaciones descritas.

$$Q = \frac{e^{0.265} I^{1.38}}{P^{1.39} TEMP^{2.37}} \quad (2)$$

Tabla 6
Resultados de la estimación de la demanda

Modelo	(1)	(2)
Variables	$\ln Q$	$\ln Q$
$\ln P$	-1.505*** (0.529)	-1.388*** (0.486)
$\ln Temp$	-3.678* (1.825)	-2.374* (1.386)
$\ln I$	1.015* (0.393)	1.380** (0.523)
$\ln CE$	1.008 (1.982)	
$\ln PMA$	0.44 (0.650)	
Constante	6.39 (7.013)	0.265 (8.183)
Observaciones	207	207
R-cuadrada	0.300	0.282

Errores estándar robustos en paréntesis

*** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$

Fuente: elaboración propia en STATA con las fuentes descritas.

En la estimación sorprende que la elasticidad de la demanda respecto a la temperatura es negativa. Si la temperatura se incrementa en un 1%, el consumo de agua en metros cúbicos disminuye en 2.37% manteniendo fijas las demás variables. Hay que considerar que la zona de estudio pertenece a un clima seco, donde las tarifas de agua son más elevadas que en las zonas donde hay más humedad y mayor disponibilidad de agua. La muestra de la población pertenece a la clase media baja y media alta mayormente. Si se eleva la temperatura en principio se consume más agua. Pero la oferta disminuye tanto por el clima que impide que los acuíferos se llenen, como por el tandeo que pudiera hacer el organismo operador. El consumidor entonces racionaliza su uso de agua. De otro modo se ve en la necesidad de contratar servicios auxiliares para abastecerse de agua, como los son las pipas. Este hecho no lo contemplan los recibos del agua. Esta es la razón por la que la elasticidad es negativa. A continuación, se muestra el procedimiento llevado a cabo para la estimación de la función de costos.

2.2 Estimación de la función de costos

Para determinar la función de costos de extracción del agua potable, se consideró nuevamente la información de INTERAPAS, el organismo operador

en la zona estudiada. El agua del acuífero se extrae a través de bombeo. A partir de los datos de los informes anuales de INTERAPAS se tienen los elementos necesarios para identificar los costos fijos y los variables. Se determinó que aproximadamente el 60% de los costos totales pertenece a los costos fijos. La base de la información usada proviene de INTERAPAS (2015) y BANXICO (2019). Con la primera fuente se obtienen los datos de extracción y costo en el periodo 2006-2014 y con la segunda los datos de la inflación anual del periodo analizado. La tabla 7 presenta esta información.

Tabla 7
Costos de extracción de agua e inflación 2006-2014 a pesos de 2014

Año	Metros cúbicos extraídos (miles)	% Variación	Costo total	Inflación anual
2014	98,650	-7%	\$ 514,213	4.08%
2013	106,530	2%	\$ 484,696	3.97%
2012	104,450	6%	\$ 502,371	3.57%
2011	98,500	4%	\$ 394,385	3.82%
2010	94,920	2%	\$ 390,970	4.40%
2009	93,230	2%	\$ 379,148	3.57%
2008	91,630	-3%	\$ 388,618	6.53%
2007	94,230	2%	\$ 362,744	3.76%
2006	92,200		\$ 331,044	4.05%

Fuente: elaboración propia con datos de BANXICO (2019) e INTERAPAS (2015).

Con la información anterior se tienen los elementos para estimar la curva de costos. Es muy común plantear modelos de costos a través de funciones cúbicas donde el costo se encuentra en función de la cantidad producida. Si la función de costos totales es cúbica, $C(Q) = \alpha_0 + \alpha_1 Q + \alpha_2 Q^2 + \alpha_3 Q^3$, los costos medios tienen una expresión cuadrática. Si asumimos que para Q suficientemente alta el término α_0/Q del costo medio es muy pequeño, el costo medio que queremos estimar es una función cuadrática. Para verificar esta idea de manera empírica se realizaron varios ensayos. Con los datos de INTERAPAS (2015) se estimaron funciones de costo medio de tipo cúbico y de tipo cuadrático. Los mejores resultados se obtuvieron con el modelo cuadrático. La tabla 8 reporta los resultados de las regresiones. Se decidió representar los costos medios con el modelo cuadrático que aparece en la segunda columna. Se considera entonces el modelo de costo medio de la ecuación (2) siguiente donde Q representa la cantidad de metros cúbicos extraídos.

$$CMe(Q) = \beta_0 + \beta_1 Q + \beta_1 Q^2 \quad (2)$$

Utilizando la información de la tabla 7 se obtienen las estimaciones robustas de los coeficientes de la curva de costos medios y se reportan en la tabla 8. En la tabla aparecen los niveles de significancia para cada uno de los coeficientes del modelo cuadrático.

Tabla 8
Resultados de las estimaciones de la curva de costos

Modelo	(1)	(2)
Variables	$C(Q)$	$C(Q)$
Q	-68.430 (93.765)	-7.33*** (1.829)
Q^2	0.0013 (0.0018)	0.0000877*** (0.0000189)
Q^3	-6.20E-09 (9.49E-09)	
Observaciones	9	9
R-cuadrada	0.933	0.925

Errores estándar robustos en paréntesis

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Fuente: elaboración propia en STATA e información de INTERAPAS (2015).

La función de costos medios estimada aparece en la ecuación (3), como sigue:

$$CMe(Q) = 298,724 - 7.33Q + 0.0000877Q^2 \quad (3)$$

El costo medio va decreciendo hasta el punto mínimo, alrededor de los 41,800 miles de metros cúbicos. Este punto representa de alguna manera la extracción eficiente ligada con el menor precio al que se puede ofrecer el producto sin incurrir en pérdidas. Cuando se extrae más agua el precio se tiene que incrementar, ya que el costo medio se incrementa. Cuando la cantidad de agua extraída anualmente supera el nivel de recarga anual del acuífero, este empieza a deteriorarse y aparece la sobreexplotación. Según la tabla 1, el acuífero de San Luis Potosí tiene una recarga anual de 78,100 miles de metros cúbicos anuales. La extracción anual supera ampliamente esta cifra.

Con las estimaciones de la demanda y costos medios podemos, ahora sí, plantear el problema de optimización dinámica y estimar su óptimo.

2.3 Modelo de control óptimo

En la teoría de control óptimo se buscan trayectorias de variables, limitadas por un sistema dinámico, que hagan máximo un determinado objetivo. Este se establece generalmente por medio de un funcional a maximizar que involucra parámetros, variables de control y variables de estado. En el caso del agua, las variables de control son las que pueden ser gestionadas por el administrador del recurso. Las variables de estado se refieren a los niveles del agua; el *stock* de agua en el tiempo depende tanto de las leyes de recarga de la naturaleza como de las políticas de extracción y uso del agua. Las variables de control inciden en las variables de estado y la forma en que se relacionan ambas variables se representa mediante un sistema dinámico, generalmente una ecuación diferencial en la que aparecen los dos tipos de variables. Se incorporan también condiciones de transversalidad que limitan las trayectorias o senderos para encontrar la trayectoria que optimiza la función objetivo del modelo. A través de condiciones iniciales se restringe también el horizonte de tiempo donde se realiza la optimización. En modelos de tipo económico también se considera un factor de descuento, con el fin de traer a valor presente las unidades monetarias del futuro. A continuación, se describe con cierto detalle el modelo usado.

2.4 Restricción dinámica

La cantidad de agua contenida en el acuífero se representa con la variable x , que será la variable de estado. Esta variable es implícitamente una función del tiempo, $x=x(t)$, por comodidad en la notación solo la expresamos con x . El crecimiento natural de la cantidad de agua lo representamos con la variable R que representa la recarga anual o crecimiento natural. Para hacer el modelo más simple vamos a suponer que esta R es constante. La restricción o sistema dinámico es $\dot{x} = R - (1 - \alpha)q$ donde q es el flujo de extracción de agua y α es un coeficiente de flujo de retorno¹. Tanto α como q son variables que dependen del tiempo. La máxima capacidad de x es \bar{x} y su valor mínimo es un valor \underline{x} compatible con la supervivencia del acuífero. Notemos que la restricción dice que el nivel del *stock* aumenta cuando hay más recarga que uso y disminuye cuando hay más uso que recarga.

2.5 Costos

El costo promedio del bombeo de x unidades de agua está dada por $c(x)$, una función convexa y diferenciable de x . El costo promedio está acotado en el

¹ Son los volúmenes de agua que se reincorporan a la red de drenaje de la cuenca hidrológica provenientes del regadío y de los diferentes usos del agua.

dominio de los posibles niveles de extracción, que van desde cero al máximo nivel extraíble. El costo promedio siempre es no negativo y creciente al aumentar los niveles de extracción. Puede crecer, pero no de manera infinita. Esto se resume como sigue en las condiciones (4) y (5). Conviene aclarar que la q que aparece en (5) se refiere a la demanda de agua en el mercado. Esta demanda se satisface con la x extraída del acuífero, pero no son idénticas dado el posible desperdicio y efectos de recarga por parte de la misma agua extraída.

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} c(x) \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} c(x) < \infty \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} c'(x) \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} c'(x) < \infty \quad (4)$$

$$\bar{x} \geq x \geq 0, \quad q \in [0, \infty) \quad (5)$$

2.6 Demanda

Las preferencias de los consumidores generan una curva inversa de demanda $p(q)$ la cual es continuamente diferenciable. Se asume que la función es asíntótica a los ejes. Con bajos niveles de extracción hay escasez y precios altos, con niveles altos de extracción hay mucha agua en el mercado y el precio se reduce.

2.7 Problema de optimización dinámica

La función objetivo se representa en (6), donde aparece el funcional a optimizar. La gestión eficiente de la administración debe maximizar el valor presente del beneficio social neto, el cual está definido como el excedente bruto del consumidor menos el costo promedio total. Para cada nivel de extracción, calculamos la “ganancia” como la diferencia entre el precio que se genera y el costo medio de cada unidad extraída. Las ganancias del futuro se traen a valor presente para determinar las trayectorias óptimas tanto de extracción como la variable de estado. La restricción de la optimización se representa en (7).

$$\max_q \int_0^{\infty} e^{-rt} [p(q) - c(x)] q dt \quad (6)$$

$$s. a. \dot{x} = R - (1 - \alpha)q(p) ; \quad x(0) = x_0 > 0 ; \quad \bar{x} \geq x \geq 0, \quad q \in [0, \infty) \quad (7)$$

<i>Variable</i>	<i>Definición</i>
p	precio del agua, variable de control
q	caudal de extracción, cantidad de agua extraída
$p(q)$	curva de demanda inversa, que es continuamente diferenciable y asíntótica a los ejes, determina el precio cuando se extrae q
$q(p)$	función de demanda de agua

x	reserva de agua (nivel del acuífero), variable de estado
x_0	reserva inicial de agua
$c(x)$	función de costo promedio (diferenciable, convexa)
r	tasa de interés, tasa de descuento social
R	tasa de crecimiento (recarga)
α	coeficiente de flujo de retorno

Con los datos de la ENIGH y la metodología expuesta en los apartados anteriores obtenemos la estimación de demanda y costos, obteniendo para el modelo las siguientes variables a sustituir en el modelo y las curvas estimadas:

Variable	Definición
<i>Ingreso</i>	\$14.04 miles de pesos
<i>temp</i>	17.5° Celsius
\bar{x}	78,100 m ³ (en miles)
r	10% tasa de descuento social
R	78,100 m ³ (en miles) anuales de recarga
α	6% de flujo de retorno

La tasa de descuento social es la propuesta por CONAGUA y SEMARNAT (2017) en su metodología para evaluación de proyectos socioeconómicos y de inversión.

El problema de optimización para la gestión óptima con los datos empíricos anteriores queda como sigue:

$$\max_q \int_0^{\infty} e^{-0.1t} \left[0.1266q^{\frac{-1}{1.39}} - (298,724 - 7.33x + 0.0000877x^2) \right] q dt \quad (8)$$

$$s. a. \dot{x} = 78,100 - 0.0532p^{-1.39}; x(0) = x_0 > 0; 78,100 \geq x \geq 0; q \in [0, \infty) \quad (9)$$

Los resultados de la aplicación al modelo se comentan abajo. Es importante notar que se asume que el nivel de recarga R es constante y coincide con el nivel máximo de posible extracción. La condición inicial $x(0)$ se deja libre para poder analizar las posibilidades resultantes. Se analizan las posibilidades de óptimo interior y de óptimo en cualquiera de las dos esquinas. El desarrollo del procedimiento completo para llegar a las soluciones se encuentra en el apéndice. El lector interesado puede también consultar Rubio et. al. (1994) para mayores detalles.

2.8 Solución interior

En este caso se analiza la posibilidad de una solución interior, donde el óptimo se encuentre estrictamente entre los niveles mínimos y máximos del acuífero. Se tiene:

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0.00003658 \quad (10)$$

$$\dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = (47,578,625 - 1,140 + 0.000692733x^2)^{-1.39} \quad (11)$$

$$\hat{p} = 0.00003658 \quad (12)$$

La isoclina para el precio quedaría:

$$p = 6,023,454 - 144,317x + 0.0000877x^2 \quad (13)$$

Ahora se obtendrán los valores característicos de acuerdo con el punto crítico (\hat{p}, x^*) y se analizará su estabilidad. Se encuentran dos casos.

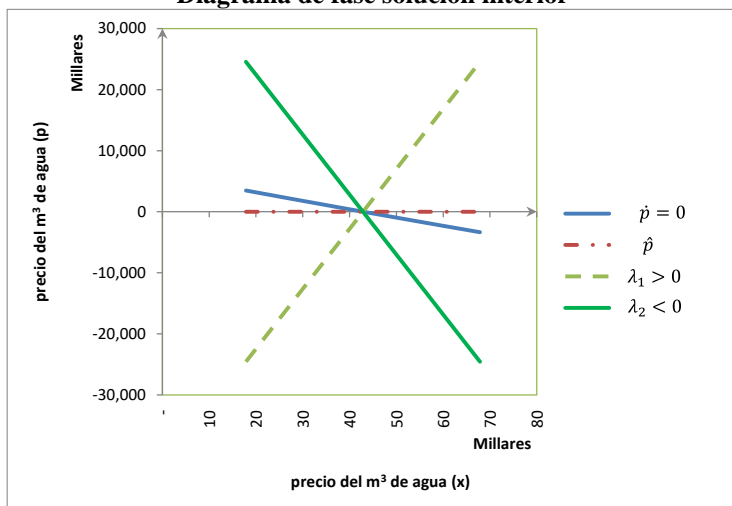
$x_1 = 1,602,725$	$\lambda_1 = 0.05 + 201,499i$	Es una espiral retractora	(14)
	$\lambda_2 = 0.05 - 201,499i$		

$x_2 = 42,854$	$\lambda_1 = 201,506 > 0$	Es un punto silla	(15)
	$\lambda_2 = -201,506 < 0$		

El caso $x_1 = 1,602,725$ corresponde a una espiral retractora que no es factible, además de no mostrar ninguna estabilidad. Es imposible un nivel del agua de 1,602,725 miles de m^3 . El segundo caso corresponde a un punto silla. Se considera como una opción aceptable de equilibrio, puesto que indica que el nivel óptimo de extracción son 42,854 miles de m^3 , siendo que la recarga máxima que se ha tenido es de 78,100 miles de m^3 .

Como se menciona en el apéndice sólo hay un estado estacionario (\hat{p}, x^*) con $0 < x^* < \bar{x}$, la trayectoria óptima conduce al estado estacionario. La trayectoria óptima se aproxima asintóticamente a él. Si la reserva inicial, dada a través de la condición inicial x_0 , es más grande [menor] que la reserva en el estado estacionario, entonces el precio inicial es más bajo [más alto] que el precio del estado estacionario y el precio se incrementa [decrementa] a lo largo del camino óptimo como se muestra en la figura 2.

Figura 2
Diagrama de fase solución interior



Fuente: elaboración propia con datos de la ENIGH e INTERAPAS.

2.9 Solución esquina con $x^* = 0$

Este caso ocurre cuando se extrae la capacidad mínima del acuífero. Aunque la solución se establece como $x^* = 0$, cabe mencionar que el nivel de esta reserva inicial coincide con aquel nivel en donde no se encuentra en peligro la supervivencia del acuífero, ya que es el mínimo requerido para conservar la vida del mismo.

Entonces en este caso se tiene esta condición de transversalidad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[c(x) - \frac{R}{r} c'(x) \right] \leq \hat{p} \tag{16}$$

Se tiene:

$$\dot{x} = R - (1 - \alpha)q \tag{17}$$

$$\dot{p} = r(p - c) + c'R - (1 - \alpha)\eta^2 \quad \text{con } \eta^2 \geq 0 \tag{18}$$

La función de la isoclina del precio es:

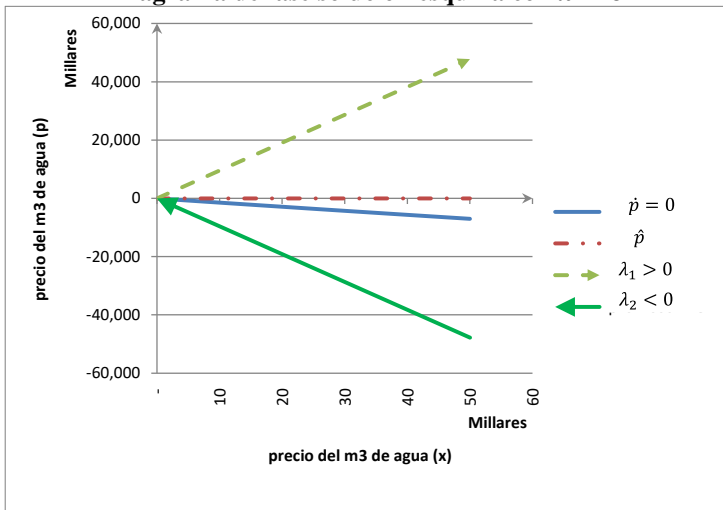
$$p = c - \frac{c'R - (1 - \alpha)\eta^2}{r} \tag{19}$$

$$p = 6,023,454 - 144,317x + 0.0000877x^2 - 9.4\eta_2 \tag{20}$$

El valor de η_2 será elegido para la isoclina p tal que intersecte a la isoclina $\dot{x} = 0$ en el punto $(\hat{p}, 0)$. El jacobiano no cambia ya que al derivar las funciones las η_i son constantes, por lo tanto, sigue siendo un punto silla el estado estacionario.

Es óptimo agotar físicamente las reservas de agua iniciales del acuífero o es óptimo explotarlo a la capacidad mínima compatible con la supervivencia del acuífero. En este caso solo tiene una trayectoria estable que conduce al equilibrio a partir de la condición inicial de nivel de reserva x_0 suficientemente cercana al equilibrio 0, como se muestra en la figura 3. Por lo que al llegar al punto mínimo de la reserva el sistema mantiene ese punto como equilibrio, no rebota por la trayectoria del autovalor mayor a cero.

Figura 3
Diagrama de fase solución esquina con $\dot{x} = 0$



Fuente: elaboración propia con datos de la ENIGH e INTERAPAS.

2.10 Solución esquina con $x^* = \bar{x}$

Cuando la solución sea la capacidad máxima de acuífero se tiene la siguiente condición de transversalidad:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left[c(x) - \frac{R}{r} c'(x) \right] \geq \hat{p} \tag{21}$$

Se tiene:

$$\dot{x} = R - (1 - \alpha)q \tag{22}$$

$$\dot{p} = r(p - c) + c'R + (1 - \alpha)\eta_1 \quad \text{con } \eta_1 \geq 0 \quad (23)$$

La función de la isoclina del precio es:

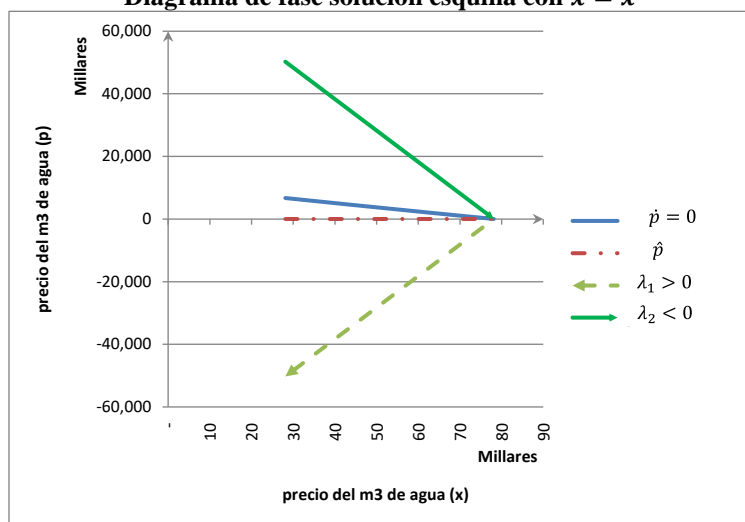
$$p = c - \frac{c'R + (1 - \alpha)\eta_1}{r} \quad (24)$$

$$p = 6,023,454 - 144,317x + 0.0000877x^2 + 9.4\eta_1 \quad (25)$$

El valor de η_1 será elegido para la isoclina p tal que intersecte a la isoclina $\dot{x} = 0$ en el punto (\hat{p}, \bar{x}) . El jacobiano no cambia ya que al derivar las funciones las η_i son constantes, por lo tanto, sigue siendo un punto silla el estado estacionario.

En este caso solo tiene una trayectoria estable que conduce al equilibrio, es óptimo explotar el acuífero a su máxima capacidad de almacenamiento. La dinámica del precio indica que va disminuyendo a medida que el nivel del acuífero se aproxima a su máximo nivel acercándose al precio de equilibrio, como se puede observar en la figura 4. Es importante comentar, como en el caso anterior, que lo anterior ocurre para condiciones iniciales x_0 suficientemente cercanas a la esquina de máxima capacidad del acuífero.

Figura 4
Diagrama de fase solución esquina con $\dot{x} = \bar{x}$



Fuente: elaboración propia con datos de la ENIGH e INTERAPAS.

3. Resultados, limitaciones y conclusiones

Se ha aplicado la teoría de control óptimo para analizar el problema de extracción y tarificación en el acuífero de San Luis Potosí. Ello ha implicado estimar una demanda y una función de costos de extracción y mantenimiento. Se han obtenido los siguientes resultados.

El análisis descriptivo de la información proveniente de la ENIGH, nos indica que los consumidores pertenecen a las clases sociales media alta y media baja. La pertenencia a estas clases sociales marca un comportamiento específico para el consumo de agua, evidentemente todos cuentan con un recibo que ampara el pago que realizan por los metros cúbicos consumidos de agua.

Para el cálculo de los costos, la información fue extraída del organismo INTERAPAS, quien administra y hace llegar el vital líquido a este sector de la población, en virtud de que el acuífero que administra este organismo abastece mayormente a la mancha urbana.

La función de demanda fue estimada de acuerdo con lo que marca la teoría económica en estos casos, es decir, como una función logarítmica. La cual resulta con una elasticidad positiva al ingreso, eso lo explicamos como una consecuencia del comportamiento de las clases sociales tomadas de muestra, ya que cambian las preferencias de consumo y en muchas ocasiones adquieren artículos para el hogar que pueden llegar a consumir un mayor número de metros cúbicos. Por otro lado, la cantidad de metros cúbicos consumidos depende negativamente tanto del precio como de la temperatura. Es obvio que se demande menos agua a medida que el precio aumente. Respecto a la temperatura nos indica que a medida que aumenta la misma, la demanda es menor. De primera impresión suena un poco ilógico que si hace más calor se consuma menos agua, pero lo observado con la estimación tiene una explicación. El clima en la capital de San Luis Potosí es semi árido, por lo que las tarifas son más costosas que en las zonas con mayor disposición de agua. Cuando aumenta el nivel de temperatura, el agua se evapora más fácilmente y empieza a escasear, el organismo administrador tandeo el suministro del agua, al disminuir la disponibilidad de agua la población se ve obligada a recurrir a la compra de agua por pipas, lo cual no es registrado en el medidor de agua.

Para los costos se estudiaron nueve años derivados de los informes anuales del organismo, se aproximó el costo fijo promedio y posteriormente, después de varios ensayos, la función de costos variables medios queda estimada a través de una función cuadrática. Es una función continua, convexa y diferenciable en la cantidad extraída. Este costo representa los costos de extracción del agua a través de bombeo.

Con las funciones anteriormente mencionadas se describe el comportamiento de la demanda del agua de dicho acuífero y los costos de extracción de esta, las cuales son necesarias para alimentar el modelo de control óptimo. En la

optimización se maximiza el valor actual de la suma infinita del precio menos costo promedio, es decir, la diferencia entre ambas curvas a través del tiempo. La variable de estado es el nivel del acuífero y la variable de control es el precio del agua ya que este es determinado por el órgano administrador. La restricción describe la dinámica del nivel del acuífero en función de la extracción de agua y la recarga del mismo. La especificación de la optimización se deja con la condición inicial de la variable de estado como parámetro. Esto permite analizar las condiciones para óptimo interior o de esquina. En los tres casos se encuentra que el equilibrio es condicionalmente estable. Las condiciones de transversalidad permiten caracterizar la trayectoria estable en cada caso. Para los fines iniciales de esta investigación, tal vez el caso más interesante es el de óptimo interior. Se encuentra un nivel ideal de explotación de 42,854 miles de metros cúbicos y un precio $p=0.00003658$ de pesos. Más abajo se comentan las limitaciones y se abunda en la interpretación. Este nivel de extracción se puede interpretar, dados los costos y demanda estimada, como el ideal sustentable. En un entorno de este nivel, los precios se ajustarían asintóticamente al precio de equilibrio. Cuando inicialmente se extrae más que la cantidad de equilibrio, el precio resulta menor que el precio de equilibrio y tenderá a subir. Cuando inicialmente se extrae menos que la cantidad de equilibrio, el precio resulta mayor que el precio de equilibrio y tenderá a bajar hasta ajustar la demanda a la de equilibrio. Para el caso en que el equilibrio es el nivel mínimo del acuífero, al extraer muy poco el precio se va incrementando hasta llegar a su nivel máximo con nivel cero de extracción. Entre menos disponibilidad de agua, mayor es el precio. En el caso en que la solución de esquina es el máximo posible del acuífero, la solución se comporta de manera contraria al caso anterior. Como se parte de una condición inicial de extracción menor a la óptima, el precio inicial es alto, pero se va reduciendo en la medida en que van aumentando los niveles de extracción hasta llegar al óptimo consistente con la cantidad máxima de reserva y la demanda.

La interpretación dada es la consistente con la optimización realizada. Es natural preguntarse cuál de los posibles óptimos es el deseable. En el modelo ello depende de la condición inicial que dejamos abierta. Habría que decidir entre las dos esquinas y la solución interior. En un caso se consume agua al mínimo, se preserva la naturaleza, pero se vende muy cara. En el otro extremo se vende agua relativamente barata, pero se tiene la máxima extracción posible. La solución interior parecería más razonable y aceptable por las mayorías, haciendo una similitud con la regla del votante mediano.

En el modelo se hizo la hipótesis de que el nivel de recarga es el máximo nivel de extracción posible. Este nivel de extracción máxima posible no es fácil de obtener, al menos en datos oficiales. Esto es muy limitante. En el caso de San Luis Potosí, ya se comentó que el nivel de extracción actual supera al doble de

la recomendación de CONAGUA. La modelación misma también puede mejorarse, incorporando variables no consideradas y mejorando la especificación tanto de la condición inicial como del nivel máximo posible de extracción.

Otra de las limitaciones de este estudio se relaciona con la dificultad para encontrar micro medición de los consumos de agua doméstica. Una buena base de estos datos permitiría obtener una mejor estimación de la demanda y describir inclusive por segmentos de clase social la demanda de agua perteneciente a cada una de ellas. Si se pudieran estimar varias demandas se podría analizar una cantidad más importante de escenarios. Adicionalmente, se sabe que el 66% de la extracción del agua es para uso doméstico, lo cual nos deja un porcentaje que no es considerado dentro del modelo. Asimismo, respecto a los costos, hace falta contar con información más desagregada que permita diferenciar claramente los gastos fijos y los gastos variables.

Por lo que respecta al modelo, se podría adicionar variables como el crecimiento poblacional, y externalidades como la contaminación o intrusión salina. Se podría establecer una función específica de recarga del acuífero para poder describir mejor su comportamiento.

Dada la dificultad para calcular costos y demandas, sería ideal que los organismos oficiales ligados al tema del agua se coordinen mejor con el INEGI para proporcionar una buena base de datos públicos que permita hacer mejores estudios. Ello permitiría atender a tiempo la problemática relacionada con la sobreexplotación de los acuíferos.

Una conclusión, obtenida al analizar el tema, consiste en recomendar una evaluación y revisión seria de las tarifas de agua para distintos usuarios. Generalmente se actualizan con índices de inflación, pero se requiere algo menos superficial. Lo mismo ocurre con la concesión de derechos de agua, dada la sobreexplotación del acuífero. Es importante, también, mejorar las condiciones físicas del acuífero para ayudar a su recarga, construyendo sistemas de captación artificial e incrementando la plantación de árboles en los cerros, en lugar de construir casas y edificios. Factor también de mejora continua es la educación de la población, con campañas para evitar el desperdicio de agua.

Apéndice

En el presente apéndice se desarrolla la solución del problema de optimización planteado.

$$\max_q \int_0^{\infty} e^{-rt} [p(q) - c(x)] q dt \quad (1)$$

$$s. a. \dot{x} = R - (1 - \alpha)q(p) ; \quad x(0) = x_0 > 0 \quad ; \quad \bar{x} \geq x \geq 0, \quad q \in [0, \infty) \quad (2)$$

Para resolver el problema se construye el hessiano, definiendo las funciones:

$$F = e^{-rt}[p(q) - c(x)]q \quad (3)$$

$$G = [p(q) - c(x)]q \quad (4)$$

$$f = R - (1 - \alpha)q(p) \quad (5)$$

$$H = F + \lambda f \quad (6)$$

pero λ se redefine como $\lambda = \bar{\lambda}e^{-rt}$ quedando como sigue el hessiano a tiempo corriente:

$$\bar{H} = G + \bar{\lambda}f \quad (7)$$

Por lo tanto, el lagrangiano quedaría:

$$L(x, q, \lambda, \eta^1, \eta^2) = \bar{H}(x, q, \lambda) + \eta^1(c^1 - g^1) + \eta^2(c^2 - g^2) \quad (8)$$

Por el supuesto de la función de demanda se evitan las soluciones esquina de $q=0$ o ∞ , por lo tanto, se obtendrán las condiciones suficientes y de transversalidad.

$$L(x, q, \lambda, \eta^1, \eta^2) = [p(q) - c(x)]q + \bar{\lambda}[R - (1 - \alpha)q] + \eta^1(\bar{x} - x) + \eta^2(0 - x) \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p - c(x) - \bar{\lambda}(1 - \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = c(x) + \bar{\lambda}(1 - \alpha) \quad (10)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial L}{\partial x} = r\bar{\lambda} + c'(x)q + \eta^1 - \eta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \frac{-c'(x)q - \eta^1 + \eta^2}{r} \quad (11)$$

$$\dot{x} = -\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - (1 - \alpha)q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{R}{(1 - \alpha)} \quad (12)$$

posteriormente se manejan las ecuaciones de p (10) y $\dot{\lambda}$ (11) y obtenemos la siguiente expresión:

$$\dot{p} = r(p - c) + c'R + (1 - \alpha)(\eta^1 - \eta^2) \quad (13)$$

Las condiciones de transversalidad son las siguientes:

$$\eta_1 \geq 0 \quad (= 0 \text{ si } \bar{x} > x) \quad (14)$$

$$\eta_2 \geq 0 \quad (= 0 \text{ si } x > 0) \quad (15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \bar{\lambda}(t) \geq 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \bar{\lambda}(t) \geq 0 \quad (16)$$

Si se considera una solución interior considerando los supuestos de transversalidad se tiene:

$$\text{de } \dot{x} = 0 \text{ se obtiene } R - (1 - \alpha)q(p) = 0 \quad (17)$$

$$\text{de } \dot{p} = 0 \text{ se obtiene } r(p - c) + c'R = 0 \quad (18)$$

de la ecuación (17) el estado estacionario de p resulta:

$$\hat{p} = p \left(\frac{R}{1 - \alpha} \right) \quad (19)$$

Asimismo, la función de la isoclina del precio es:

$$p = c - \frac{c'R}{r} \quad (20)$$

Esta condición nos indica que en el estado estacionario el precio es igual al efecto positivo de la recarga natural sobre el costo marginal de la extracción sobre la tasa de interés.

Por otro lado, se tiene:

$$\left. \frac{dp}{dx} \right|_{p=0} = c' - \frac{R}{r} c'' \quad \forall x \in [0, \bar{x}] \quad (21)$$

De acuerdo con esto, habrá una solución en el intervalo $[0, \bar{x}]$ y será la única si:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[c(x) - \frac{R}{r} c'(x) \right] > \hat{p} > \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left[c(x) - \frac{R}{r} c'(x) \right] \quad (22)$$

Para determinar su estabilidad se examinarán las raíces características:

Punto crítico: $E = (\hat{p}, x^*)$, siendo x^* la solución a la ecuación:

$$J_E = \begin{bmatrix} \frac{d\dot{p}}{dp} & \frac{d\dot{p}}{dx} \\ \frac{d\dot{x}}{dp} & \frac{d\dot{x}}{dx} \end{bmatrix}_{(\hat{p}, x^*)} \quad (23)$$

Valuando en el punto se obtienen las raíces características:

$$\lambda_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4(1 - \alpha)q'(\hat{p})[-rc'(x^*) + c''(x^*)R]}}{2} > 0 \quad (24)$$

$$\lambda_2 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4(1 - \alpha)q'(\hat{p})[-rc'(x^*) + c''(x^*)R]}}{2} < 0 \quad (25)$$

El radical es positivo; pero de las raíces, una es positiva y otra es negativa. Eso implica que la solución es un punto silla.

Referencias

- [1] Amigues, J. P., Gaudet, G., & Moreaux, M. (1997). Rational pricing of groundwater with a growing population. *Environmental Modelling & Assessment*, 2(4), 323-331.
- [2] Amir, I. y F.M. Fisher, F. (1999). Analyzing agricultural demand for water with an optimizing model. *Agricultural Systems* 61(1), 45-56.
- [3] Ávalos, R., Alcántara, C., Luna, R. (2008). "Evaluación de la calidad físico-química del agua en fuentes de abastecimiento de agua destinada al uso y consumo humano en el estado de San Luis Potosí", *Revista Red Sanitaria*, 4(13), 1-8.
- [4] Balek, J. (1983). *Hydrology and water resources in tropical regions*. Elsevier.
- [5] Balek, J. (1988). "Groundwater recharge concepts", in Simmers I. (ed.), *Estimation of Natural Groundwater Recharge*. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), Vol. 222. Springer, Dordrecht, 3-9.
- [6] BANXICO. (2019). Inflación. Obtenido de <http://www.anterior.banxico.org.mx/portal-inflacion/inflacion.html>
- [7] Cabrera-Estupiñán, H. y F. Dilla-Salvador (2011). Modelo de administración de acuíferos: MADA. *Tecnologías y ciencias del agua*, 2(4), 5-24.
- [8] Carrillo-Rivera, J.J. y M. A. Armienta (1989). "Diferenciación de la contaminación inorgánica en las aguas subterráneas del valle de la ciudad de San Luis Potosí, SLP, México", *Geofísica Internacional*, 28(4), 763-783.
- [9] Cázares Rivera, D. (2007). *Propuesta de estructura tarifaria de agua potable para los organismos operadores de los servicios de agua y drenaje en la frontera México-EUA*. Monterrey, Nuevo León, México: Centro de Estudios del Agua CEA, Banco de Desarrollo de América del Norte.
- [10] CONAGUA y SEMARNAT (2017) Metodologías de Evaluación Socioeconómica y Estructuración de Proyectos de Inversión (Agua potable, Alcantarillado y Saneamiento) México: Comisión Nacional del Agua.
- [11] CONAGUA y SEMARNAT (2018a) "*Estadísticas del Agua en México*". México: CONAGUA.
- [12] CONAGUA, SEMARNAT. (2018b). "Actualización de la disponibilidad media anual de agua en el acuífero de San Luis Potosí (2411) Estado de San Luis Potosí". México: Diario Oficial de la Federación. 4/01/2018.
- [13] CONAGUA (2018c). "Ley de Aguas Nacionales y su Reglamento", Comisión Nacional del Agua, México: Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT).
- [14] CONAGUA, SEMARNAT. (2014). *Plan Nacional de Desarrollo. Programa Nacional Hídrico*. México: CONAGUA.
- [15] DOF (2016). "Ley de Aguas Nacionales". Diario Oficial de la Federación. Decreto. Tomo DCCL, No.17. México: Diario Oficial de la Federación.
- [16] DOPSL (2016) "Ley de Aguas para el Estado de San Luis Potosí", Diario Oficial Plan de San Luis, Decreto 476. San Luis Potosí, México: Gobierno del Estado de San Luis Potosí.
- [17] García-Salazar, J.A. y J.S. Mora-Flores (2008). Tarifas y consumo de agua en el sector residencial de la Comarca Lagunera. *Región y Sociedad*, Vol. 20, No. 42, Págs. 119-132.

- [18] García Sánchez, E. (2016). Caracterización hidrogeológica de los acuíferos de Aspe y la Horna. *Tesis doctoral*. Alicante, España: Universidad de Alicante.
- [19] Guerrero-Martínez, Lilia; Hernández-Marín, Martín; Burbey, Thomas J. (2018), "Estimation of natural groundwater recharge in the Aguascalientes semiarid valley", *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas*, 35(3), 268-282, México: UNAM. <https://doi.org/10.22201/cgeo.20072902e.2018.3.1022>
- [20] Escolero Fuentes, O., Gutiérrez Ojeda C. y Mendoza Cázares, E. (2017). *Manejo de la recarga de acuíferos: Un enfoque hacia Latinoamérica*. Jiutepec, Morelos, México: IMTA, UNAM.
- [21] INTERAPAS (2015) Informes Anuales 2010-2015, Organismo Intermunicipal Metropolitano de Agua Potable, Alcantarillado, Saneamiento y Servicios Conexos. San Luis Potosí, México.
- [22] Medellín Azuara, J., Mendoza, L., Howitt, R., & Lund, J. (2009). Un modelo calibrado de demanda de agua para uso agrícola para tres regiones en el norte de Baja California, *Agrociencia* 43, pp. 83-96.
- [23] Pardo, F. J., Castro, J. P., & Martínez, C. (1998). Gestión óptima de aguas subterráneas: regulación frente a no regulación. *Revista Española de Economía*, 15 (1), pp. 085-121.
- [24] Plata L. y D. Rodríguez (2020). Legislación y práctica en la provisión del servicio de agua: un estudio de caso a partir de la teoría de justicia distributiva. En E. Casares y L. Plata Pérez, *Teoría Económica Aplicada* (págs. 213-254). México: Universidad Autónoma Metropolitana.
- [25] POGEPSL (2006) Periódico Oficial del Gobierno del Estado. Plan de San Luis. Decreto No. 594. Edición extraordinaria. Año LXXXVIX, Tomo II.
- [26] POGEPSL (2016) Periódico Oficial del Gobierno del Estado. Plan de San Luis. Decreto No. 540. Edición extraordinaria. Año XCIX, Tomo II.
- [27] Roumasset, J. y Wada, C. (2010). Optimal and sustainable groundwater extraction. *Sustainability* (2), 2676-2685. doi:10.3390/su2082676.
- [28] Rubio, S. J., y Casino, B. (2001). Competitive versus efficient extraction of a common property resource: The groundwater case. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(8), 1117-1137.
- [29] Rubio, S. J. y Castro, J. P. (1996). Long-run groundwater reserves under uncertainty. *Investigaciones económicas*, 20 (1), pp. 71-88.
- [30] Rubio, S., Martínez, C. y Castro, J. (1994). Optimal Management of Groundwater with Increasing Demand. *Revista Española de Economía*, 11 (Extra-1), 161-190.
- [31] Scheierling, S., J. Loomis, J. y R. Young, R. (2006). Irrigation water demand: A meta-analysis of price elasticities. *Water Resources Research*, Vol. 42, W01411, 1-9. doi:10.1029/2005WR004009.
- [32] Segovia Sánchez, O., Moreno Mata, A., Medellín Milán, P. y Avalos Lozano, J.A. (2012). *Análisis de la oferta de agua. Caso: San Luis Potosí (1992-2012)*. San Luis Potosí, México: COLSAN.
- [33] Simmers, I. (Ed.). (2013). *Estimation of natural groundwater recharge* (Vol. 222). Springer Science & Business Media.
- [34] Soto, G., A. Ramírez Fuentes y L. Maya (2012). *Estimación de los factores y funciones de la demanda de agua potable en el sector doméstico en México*, CONAGUA, Reporte Técnico. DOI:[10.13140/RG.2.1.1597.1365](https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1597.1365)
- [35] Trnka, M., Feng, S., Semenov, M. A., Olesen, J. E., Kersebaum, K. C., Rötter, R. P., ... & Büntgen, U. (2019). Mitigation efforts will not fully alleviate the

increase in water scarcity occurrence probability in wheat-producing areas. *Science Advances*, 5 (9), eaau 2406.

- [36] Weather Spark. (2019). <https://es.weatherspark.com/map?id=6140&pageType=1>
- [37] Zilberman, D. (1982). The use and potential of optimal control models in agricultural economics. *Western Journal of Agricultural Economics*, Vol. 7, pp. 1-12 395-405.
- [38] Zurita, I. R. M. L. (2021). *Optimización dinámica en un modelo de turismo sustentable*. Tesis doctoral. México: Centro de Investigación y Docencia Económicas A.C.

