

**Artículos**

**Fiscal Institutions and the Size and Inter-Regional Distribution of Public  
Redistribution**

*Raul A. Ponce-Rodriguez, Juan Medina-Guirado*

**Estimación del VaR mediante un modelo condicional multivariado bajo la hipótesis  
 $\alpha$ -estable sub-Gaussiana**

*Ramona Serrano-Bautista, Leovardo Mata-Mata*

**Determinantes del aumento o disminución de empresas: Análisis por entidad  
federativa y estrato de edad**

*Rolando I. Valdez, Eder J. Noda-Ramírez*

**Sostenibilidad del gasto público: Cobertura y financiamiento de enfermedades  
crónicas en México**

*Alejandra Macias-Sanchez, Hector Juan Villareal-Paez*



**UANL**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Economía

Centro de Investigaciones Económicas



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

## Universidad Autónoma de Nuevo León Rector

Dr. med. Santos Guzmán López

**Secretario General**

Dr. Juan Paura García

**Secretario Académico**

Dr. Jaime Arturo Castillo Elizondo

**Secretario de Extensión y Cultura**

Dr. José Javier Villarreal Álvarez Tostado

**Director de Editorial Universitaria**

Lic. Antonio Jesús Ramos Revillas

**Directora de la Facultad de Economía**

Dra. Joana Cecilia Chapa Cantú

**Director del Centro de Investigaciones Económicas**

Dr. Edgar Mauricio Luna Domínguez

### Editor Responsable

Dr. Jorge Omar Moreno Treviño

**Editores Asociados**

Dr. Edgar Mauricio Luna Domínguez

Dr. Daniel Flores Curiel

Dra. Cinthya Guadalupe Caamal Olvera

Dra. Joana Cecilia Chapa Cantú

### Consejo Editorial

Alejandro Castañeda Sabido (Comisión Federal de Competencia Económica, México)

Dov Chernichovsky (University of the Negev, Israel)

Richard Dale (University of Reading, Inglaterra)

Alfonso Flores Lagunes (Syracuse University, EUA)

Chinhui Juhn (University of Houston, EUA)

Timothy Kehoe (University of Minnesota, EUA)

Félix Muñoz García (Washington State University, EUA)

Salvador Navarro (University of Western Ontario, Canadá)

José Pagán (The New York Academy of Medicine, EUA)

Elisenda Paluzie (Universitat de Barcelona, España)

Leobardo Plata Pérez (Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México)

Martín Puchet (Universidad Nacional Autónoma de México, México)

Patricia Reagan (Ohio State University, EUA)

Mark Rosenzweig (Yale University, EUA)

Ian Sheldon (Ohio State University, EUA)

Carlos Urzúa Macías († 2024) (Tecnológico de Monterrey, México)

Francisco Venegas Martínez (Instituto Politécnico Nacional, México)

### Comité Editorial

Ernesto Aguayo Téllez, Lorenzo Blanco González (UANL, México)

Alejandro Ibarra Yúnez (Tecnológico de Monterrey, México)

Vicente Germán-Soto (Universidad Autónoma de Coahuila, México)

Raúl Ponce Rodríguez (Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México)

Ignacio de Loyola Perrotini Hernández (Universidad Nacional Autónoma de México)

### Edición de redacción, estilo y formato

Paola Beatriz Cárdenas Pech

Bricelda Bedoy Varela

Ensayos Revista de Economía, Vol. 37, No. 1, enero-junio 2018. Es una publicación semestral, editada por la Universidad Autónoma de Nuevo León, a través de la Facultad de Economía con la colaboración del Centro de Investigaciones Económicas. Domicilio de la publicación: Av. Lázaro Cárdenas 4600 Ote., Fracc. Residencial Las Torres, Monterrey, N.L. C.P. 64930. Tel. +52 (81) 8329 4150 Ext. 2463 Fax. +52 (81) 8342 2897. Editor Responsable: Jorge Omar Moreno Treviño. Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2009-061215024200-102, ISSN 1870-221X, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Licitud de Título y Contenido No. 14910, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Registro de marca ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial: 1182771. Impresa por: Serna Impresos, S.A. de C.V., Vallarta 345 Sur, Centro, C.P. 64000, Monterrey, Nuevo León, México. Fecha de terminación de impresión: 1 de mayo de 2018. Tiraje: 30 ejemplares. Distribuido por: Universidad Autónoma de Nuevo León, a través de la Facultad de Economía, Av. Lázaro Cárdenas 4600 Ote., Fracc. Residencial Las Torres, Monterrey, N.L. C.P. 64930.

Las opiniones y contenidos expresados en los artículos son responsabilidad exclusiva de los autores.

# Índice

<i>Fiscal Institutions and the Size and Inter-Regional Distribution of Public Redistribution</i>	1
Raul A. Ponce-Rodriguez, Juan Medina-Guirado	
<i>Estimación del VaR mediante un modelo condicional multivariado bajo la hipótesis <math>\alpha</math>-estable sub-Gaussiana</i>	43
Ramona Serrano-Bautista, Leovardo Mata-Mata	
<i>Determinantes del aumento o disminución de empresas: Análisis por entidad federativa y estrato de edad</i>	77
Rolando I. Valdez, Eder J. Noda-Ramírez	
<i>Sostenibilidad del gasto público: Cobertura y financiamiento de enfermedades crónicas en México</i>	99
Alejandra Macias-Sanchez, Hector Juan Villareal-Paez	





## Fiscal Institutions and the Size and Inter-Regional Distribution of Public Redistribution

### Instituciones Fiscales y el Tamaño y Distribución Inter-Regional de la Redistribución Pública

Raúl Alberto Ponce Rodríguez\*  
Juan Medina Guirado\*\*

---

#### Article information

Received:  
14 October 2016

Accepted:  
20 December 2017

**JEL Classification:**  
H72; H23; H1

**Keywords:**

Redistribution; Inter-regional externalities; Federalism; Structure and scope of government

---

#### Abstract

Fiscal institutions, which are responsible for the delegation of tax and spending powers among different tiers of governments, are important determinants of the size and efficiency of public redistribution. In this paper we develop a comparative analysis of the impact of fiscal decentralization vis-à-vis tax revenue sharing on the government's effort to redistribute income. The main findings are: first, the size of the national budget for public redistribution is the same under fiscal decentralization and tax revenue sharing. Second, different fiscal institutions lead to different regional distributions of public transfers. Third, when choosing between decentralization and tax revenue sharing, there is a tradeoff between the efficiency and the regional effort of the government to redistribute income.

---

\* Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Instituto de Ciencias Sociales y Administración, Heroico Colegio Militar y Av. Universidad No. 3775, Zona Chamizal, 32310, Ciudad Juárez, Chihuahua, México. Tel: 52-656-688-3837. [rponce@uacj.mx](mailto:rponce@uacj.mx)

\*\* Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Instituto de Ciencias Sociales y Administración: [juan.medina@uacj.mx](mailto:juan.medina@uacj.mx)



---

**Información del artículo**

---

Recibido:  
14 octubre 2016

Aceptado  
20 diciembre 2017

---

**Clasificación JEL:**  
H72; H23; H1

**Palabras Clave:**  
Redistribución;  
Externalidades inter-regionales;  
Federalismo; Estructura y alcance del gobierno

---

**Resumen**

---

Las instituciones fiscales, que determinan la responsabilidad del diseño de impuestos y gasto entre los diferentes niveles de gobierno, son importantes determinantes del tamaño y eficiencia de la redistribución pública. En este artículo, se desarrolla un análisis comparativo del impacto en el esfuerzo del gobierno por redistribuir el ingreso, entre la política de descentralización y la de compartir el ingreso fiscal. Los principales resultados son: primero, el tamaño del presupuesto en redistribución es el mismo para una economía con descentralización y en la que se comparte el ingreso fiscal. Segundo, las instituciones fiscales implican una asignación diferente en la distribución regional de transferencias públicas. Tercero, al escoger entre descentralización y compartir el ingreso fiscal, se observa un intercambio entre la eficiencia y la distribución regional de las transferencias públicas.

---

**Introduction**

For an economy with multiple tiers of government, misallocations of tax and spending policies might arise due to coordination failures among different levels of government. In particular, it is well known that a problem of tax coordination could induce vertical (see Keen 1998 and Wilson 1999) and horizontal tax externalities (see Devereux et al 2007, among others). Uncoordinated tax policies lead to horizontal fiscal externalities when subnational governments do not recognize that their tax policies affect the tax base of neighborhood districts. This, in turn, could induce state and local governments to overestimate the marginal cost of public funds leading to sub-optimal levels of state and local taxation and spending (see Wilson, 1999). Coordination failures also lead to vertical fiscal externalities because the central government does not take into account how its tax policies affect sub-national tax bases and state and local governments also do not take into account how local taxes affect the tax base of the central government. In this case, all levels of government would underestimate the marginal costs of public funds associated with raising tax revenue leading to high taxation and spending (see Johnson 1988, Boadway and Keen 1996).

Several solutions have been explored to solve the problem of coordination failures for economies with multi-level governments: one possibility is to centralize tax and spending decisions. However, fiscal centralization could actually reduce the national social welfare because the central government might be less efficient than state or local governments in differentiating local taxes and spending according to the inter-regional heterogeneity of preferences (see Oates 1972, Ponce et al 2012). Another possibility is to centralize tax policies but decentralize spending decisions.<sup>1</sup> In fact, several countries in the world use some form of tax revenue sharing, a policy that seeks to coordinate tax policies from sub-national governments and the central government, to avoid the negative effects associated with failures of coordination in a federation (see Rao 2007, Kochi and Ponce 2016).

Mexico is one of the countries that have adopted some form of tax revenue sharing as a way to coordinate tax policies from the central and state (same as above) governments. In the particular case of Mexico, the central and state governments signed an agreement to coordinate tax policies in which the central government collects tax revenue that is later distributed among different levels of governments.<sup>2</sup>

Although there is a large amount of literature that studies the relative merits of fiscal decentralization versus centralization (see Martínez-Vázquez et al 2015 among many others). To the best of our knowledge, there has been little research on the comparative advantages and disadvantages of adopting different fiscal institutions such as fiscal decentralization (in which tax and spending powers are given to sub-national governments) vis-à-vis a tax revenue sharing agreement in which taxation powers are delegated to the central government and (some) spending powers remain at the state level. Since the choice of fiscal institutions affects the provision of local public goods, the effort of the government to redistribute income, fight poverty, and provide important programs such as education and health services that are vital for the citizens' well-being, it is relevant from a policy making point of view, to have a better understanding of the advantages and shortcomings of these two fiscal institutions.

In this paper we seek to fill in this gap of the literature by developing a comparative analysis of the size and inter-regional distribution of public transfers that would arise under two fiscal institutions: fiscal decentralization

---

<sup>1</sup> This fiscal institution also has many critics, who argue that such arrangement reduces local accountability and impair the representation of the household's preferences into local policy (see Martínez-Vázquez et al 2015).

<sup>2</sup> The law of fiscal coordination in México was first implemented in 1978. The objective of this law is to coordinate the fiscal system in the Mexican federation to establish the participations of federal income to be allocated to Mexican state governments and municipalities. See [http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/31\\_180716.pdf](http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/31_180716.pdf).

versus a tax revenue sharing agreement that seeks to coordinate tax policy among state governments. To be more precise, in this paper we study the optimal allocation of public transfers for an economy that is fiscally decentralized (state governments have full command in deciding the levels of taxation and spending). We also, study the optimal allocation of public transfers for a tax revenue sharing economy: in this economy, state governments and the central government are committed to let the central government design the tax policy. After tax revenue is collected from a given tax base, state governments receive a share of the tax revenue through a formula. We then compare the size and inter-regional distribution of public transfers under these two fiscal institutions.

To do so, we develop several models in which governments are controlled by benevolent social planners that design tax and spending policies to maximize social welfare. In our analysis we distinguish two cases of interest: first, an economy in which local redistribution spending does not show spillovers. Second, an economy in which public spending leads to inter-regional spillovers. The main findings of our analysis are: first, surprisingly, that the effort to redistribute income is the same under fiscal decentralization and tax revenue sharing (that is to say, the nationwide budget for public redistribution is the same for both types of fiscal institutions). This finding is robust and it is observed in economies with and without regional spillovers from public redistribution. Second, the choice of fiscal institutions, decentralization *vis-à-vis* tax revenue sharing, leads to differences in the public transfers' regional allocation. We identify conditions in which the size of public transfers in key districts under fiscal decentralization is higher (lower) than those under tax revenue sharing.

Third, in choosing between decentralization and tax revenue sharing as fiscal institutions, there is a tradeoff between the efficiency in the allocation of resources and the inter-regional degree of government effort to redistribute income. This tradeoff could have important implications on regional and national efficacy of the government's effort to redistribute income. In particular, our findings suggest that if there is a higher (lower) proportion of low income households in some key districts (relative to the proportion of low income households in some other districts) then the government's redistributive program is more (less) effective in redistributing welfare to the poor under a fiscally decentralized economy relative to the social welfare allotted in a centralized economy with a tax revenue sharing policy.

The rest of the paper is structured as follows: section 2 considers our models of fiscal decentralization and tax revenue sharing for an economy in which there is no spillovers. Section 3 considers the case in which public redistribution shows spillovers. Section 4 includes a comparative social analysis of the choice between decentralization and tax revenue sharing.



Section 5 includes a calibration exercise of the model focusing on the inter-regional allocation of resources devoted for redistribution. Section 6 concludes with a discussion of the results and the implications for policy design.

## 1. Fiscal Decentralization Versus Tax Coordination in Public Redistribution

In the analysis that follows a comparative analysis is developed of the government's effort to reduce the inequality in income distribution under two different institutional frameworks. First, we consider a government with fiscal decentralization in which policies are uncoordinated (see section 2.1). Second, we analyze government in which there is coordinated agreement on tax policy (see section 2.2). As mentioned before, in this paper we consider tax revenue sharing as an agreement between the central and sub-national governments that seeks to coordinate their tax policies. This kind of agreement has empirical support since countries such as Mexico, India and Pakistan (see Rao 2007) use some form of tax revenue sharing. In the particular case of México, the central and subnational governments signed an agreement to coordinate tax policies in which the central government collects tax revenue that is shared among different levels of governments.<sup>3</sup>

### 1.1. Income Taxation and Redistribution under Fiscal Decentralization (Uncoordinated Tax Policies)

In this economy there are two districts  $i = 1, 2$  and each district has a population size of  $N^i \forall i$ . Households have indirect preferences given by  $v^i(w^i, \tau^i, T^i) = \alpha^i \left\{ \ln(w^i(1 - \tau^i)) + \ln(T^i) \right\}$  where  $\alpha^i > 0$  is a parameter measuring the intensity of preferences of a household with a competitive wage  $w^i$ ,  $\tau^i$  is a proportional income tax and  $T^i$  is a per household public transfer.<sup>4</sup> In this economy there is heterogeneity in the household's preferences and wages. In particular, wage heterogeneity is characterized by

---

<sup>3</sup> By setting the same tax rate among different districts of a country, horizontal fiscal tax externalities are avoided. If policy decisions are determined by the central government then this tax agreement could also avoid vertical tax externalities because the higher tier of government can take into account how taxes affect the tax bases of subnational governments.

<sup>4</sup> Following much of the literature in public economics we assume an indirect utility function (instead of a direct utility function). This approach has the advantage of simplifying the mathematical analysis.

the density  $h^i(w^i)$ :  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)dw^i = N^i/(N^i + N^{-i})$  where  $\underline{w}^i = \min(w^i)$  and  $\bar{w}^i = \max(w^i) \forall i$ .<sup>5</sup>

In this economy, the local government in each district sets an income tax  $\tau^i$  and a per household public transfer  $T^i$  to maximize the social welfare of residents of the district  $\Psi^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_L^i v^i(w^i, \tau^i, T^i)dw^i$  where  $\Omega_L^i > 0$  is the weight that the local social planner assigns for the well-being of a household with wage  $w^i$ . The public budget constraint of the local government in district  $i$  is given by  $B^i = \tau^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$  where  $B^i$  is the budget of the local government. Formally, the problem of the local government in each district is:

$$\text{Max}_{\{\tau^i, T^i\}} \Psi^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_L^i v^i(w^i, \tau^i, T^i)dw^i \tag{1}$$

$$\text{s. t: } B^i = \tau^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i \tag{2}$$

Next, proposition 1 characterizes the equilibrium levels of local taxation and spending for a fiscally decentralized economy.<sup>6</sup>

**Proposition 1.** *The set of optimal local taxes  $\tau_D^{*i} \forall i = 1,2$  and the size of public redistribution  $T_D^{*i} \forall i$  for a government with fiscal decentralization and uncoordinated subnational tax policies are:*

$$T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i \quad \forall i = 1,2 \tag{3}$$

<sup>5</sup> Moreover there is also preference heterogeneity which means that for each household with wage  $w^i \in [\underline{w}^i, \bar{w}^i]$  corresponds a distribution of preferences  $\alpha^i \in [\underline{\alpha}^i, \bar{\alpha}^i]$ .

<sup>6</sup> Our paper considers a general equilibrium model. To see this, note that we consider the indirect utility of households  $v^i(w^i, \tau^i, T^i)$  with an endowment or “wage” density  $h^i(w^i) > 0$ :  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)dw^i$ , therefore households are in their Marshallian demand function, say  $x^{*i}(w^i, \tau^i, T^i)$ , which is the utility maximizing choice of the household subject to the household’s constraint. Therefore aggregate demand is  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)x^{*i}(w^i, \tau^i, T^i)dw^i \forall i$ . In our model the aggregate supply the good is determined by  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i \forall i$ . The market clearing condition in each region is  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)x^{*i}(w^i, \tau^i, T^i)dw^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i \forall i$ .

$$\tau_D^{*i} = 1 - \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_L^i \alpha^i dw^i}{\theta^{*i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad \forall i = 1,2 \quad (4)$$

Where  $\theta^{*i}$  are the local social marginal benefits from redistribution in district  $i$ , and the national budget on public redistribution is

$$B_D^{*i} = \sum_{\forall i=1,2} T_D^{*i} = \frac{1}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1,2 \quad (5)$$

**Proof.**

The problem of tax and redistribution design for a subnational government in district  $i = 1,2$  can be characterized by the following Lagrangian

$$\delta^i(\tau_D^i, T_D^i, \theta^i) = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_L^i v^i(w^i, \tau^i, T^i) dw^i + \theta^i \left[ \tau^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i - T^i \right] \quad (6)$$

In (6)  $\theta^i$  is a Lagrange multiplier. The first order conditions are:

$$\frac{\partial \delta^i}{\partial \tau_D^{*i}} = \left( \frac{-1}{1 - \tau_D^{*i}} \right) \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_L^i \alpha^i dw^i + \theta^{*i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i = 0 \quad \forall \tau_D^{*i} > 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \delta^i}{\partial T_D^{*i}} = \left( \frac{1}{T_D^{*i}} \right) \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_L^i \alpha^i dw^i - \theta^{*i} = 0 \quad \forall T_D^{*i} > 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \delta^i}{\partial \theta^i} = \tau_D^{*i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i - T_D^{*i} = 0 \quad \forall \theta^i \neq 0 \quad (9)$$

Re-arrange the first order conditions to show

$$\tau_D^{*i} = 1 - \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_L^i \alpha^i dw^i}{\theta^{*i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad \forall i = 1,2 \quad (10)$$

Use (8) into (9) and then into the local government's budget constraint to show

$$T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1, 2 \quad (11)$$

Which implies that the national budget on public transfers in the federation,  $B_D^* = \sum_{\forall i=1,2} T_D^{*i}$ , is

$$B_D^* = \sum_{\forall i=1,2} T_D^{*i} = \frac{1}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1, 2 \quad (12)$$

For an economy with fiscal decentralization, each local government recognizes the district's distribution of welfare costs associated with taxation (see condition 7) and the district's distribution of social welfare benefits from public transfers (see condition 8). At the equilibrium,  $\tau_D^{*i} \forall i = 1, 2$ , depends on three factors: first, the welfare costs of taxation  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_L^i \alpha^i dw^i$  (an increase of the welfare cost of taxation reduces the equilibrium level of  $\tau_D^{*i}$ ); Second, the ability of the local income tax rate to collect tax revenue which is determined by the average wage in the local district  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i$  (increases in the average wage in the district lead to higher equilibrium levels of  $\tau_D^{*i}$ ). Third,  $\tau_D^{*i}$  depends positively on the district's social marginal benefits of the public transfer (which term is characterized by  $\theta^i$ ).

In proposition 1, the equilibrium level of the per-capita transfer for a resident of district  $i$   $T_D^{*i}$  is characterized in condition (3) and it depends positively on the average wage of district  $i$ . Finally, the aggregate (nationwide) effort by sub-national governments to redistribute income under uncoordinated tax policies and fiscal decentralization depends on the nationwide average wage and it is given by  $B_D^* = \sum_{\forall i=1,2} T_D^{*i}$  (see condition 5 of proposition 1).

## 2.2. Redistribution under Tax Revenue Sharing (Coordinated Tax Policies)

In this section the equilibrium level of income taxation and public redistribution with coordinated tax policies for an economy is analyzed. In this economy, state governments and the central government are committed to letting the central government design the tax policy. In particular, the central government sets a uniform  $\tau_c$  on all districts and then allocates tax

revenue to state governments throughout a formula for tax revenue sharing.<sup>7</sup> Local spending is determined by the following formulas:  $T_c^{*i} = \xi^i B_c \forall i = 1,2$  where  $B_c$  is the national budget devoted to redistribute income,  $\xi^i \in [0,1]$ :  $\sum_{\forall i=1,2} \xi^i = 1$  is the share of public funds allocated to district  $i$  and  $T_c^{*i}$  is the per-capita transfer for residents of district  $i$ .<sup>8</sup>

Hence, the problem of policy design for a benevolent social planner at the central government is to set the income tax  $\tau_c$ , the budget  $B_c$  and tax revenue shares  $\xi^i$  that finance the redistributive programs of local governments in each district  $T_c^{*i}$  to maximize the social welfare of residents of all districts  $\Psi_c = \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i v^i(w^i, \tau_c, T^i) dw^i$  where  $\Omega_c^i > 0$  is the weight that the social planner at the *central* government allocates for the well-being of households with wage  $w^i$ . The budget constraint of the central government is given by  $B_c = \tau_c \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i$ . Thus, the problem of policy design is:

$$\text{Max}_{\{\tau_c, \xi^i, B_c\}} \Psi_c = \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i v^i(w^i, \tau_c, \xi^i, B_c) dw^i \quad (13)$$

$$\text{s. t: a) } B_c = \tau_c \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad (14)$$

$$\text{b) } T_c^{*i} = \xi^i B_c \quad \forall i = 1,2 \quad (15)$$

$$\text{c) } \sum_{\forall i=1,2} \xi^i = 1 \quad (16)$$

Next, proposition 2 characterizes the equilibrium levels of fiscal policy under tax revenue sharing.

---

<sup>7</sup> This institutional set up has empirical support since several economies allocates tax revenue from the central government to subnational governments by using a formula for tax revenue sharing, see Wilson (2007) and Rao (2007).

<sup>8</sup> For this economy the indirect preferences for a household with wage  $w^i$  are  $v^i(w^i, \tau_c, \xi^i, B_c) = \alpha^i \{ \ln(w^i(1 - \tau_c)) + \ln(\xi^i B_c) \} \forall i = 1,2$ . This indirect utility function is obtained by substituting  $\tau^i = \tau_c \forall i$  and  $T_c^i = \xi^i$  into  $v^i$ . In the real world, one of the purposes of tax revenue sharing is to set a uniform income tax across regions  $\tau^i = \tau_c \forall i$  to avoid horizontal tax externalities associated with mobile tax bases. In this paper we study this strategy because it is empirically relevant

**Proposition 2.** *The optimal tax  $\tau_c^*$ , shares  $\xi^{*i} \forall i = 1,2$ , and the size of public redistribution  $T_c^{*i} \forall i = 1,2$ , for an economy with tax revenue sharing are given by:*

$$\tau_c^* = 1 - \frac{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\lambda_1^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad (17)$$

Where  $\lambda_1^*$  is the national social marginal benefit from redistribution. The formulas for tax revenue sharing are:

$$\xi^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i} \quad \forall i = 1,2 \quad (18)$$

The implied public transfers for residents in each district are:

$$T_c^{*i} = \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1,2 \quad (19)$$

And the national effort to redistribute income in the federation,  $B_c^{*i} = \sum_{\forall i=1,2} T_c^{*i}$ , is

$$B_c^* = \sum_{\forall i=1,2} T_c^{*i} = \frac{1}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad (20)$$

**Proof.**

The problem of the tax revenue sharing design for an economy with coordinated tax policies in all districts can be characterized by the following Lagrangian

$$\begin{aligned} \delta_c(\tau_c, \xi^i, B_c) &= \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i v^i(w^i, \tau_c, \xi^i B_c) dw^i \\ &+ \lambda_1 \left[ \tau_c \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i - B_c \right] + \lambda_2 \left[ 1 - \sum_{\forall i=1,2} \xi^i \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Where  $\lambda_1, \lambda_2$  are Lagrange multipliers. The first order conditions are:

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \tau_c} = \left( \frac{-1}{1 - \tau_c^*} \right) \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + \lambda_1^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i = 0 \quad \forall \tau_c^* > 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \xi^i} = \left( \frac{1}{\xi^{*i}} \right) \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i - \lambda_2^* = 0 \quad \forall \xi^{*i} > 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial B_c} = \left( \frac{1}{B_c^*} \right) \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i - \lambda_1^* = 0 \quad \forall B_c^* > 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \lambda_1} = \tau_c^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i - B_c^* = 0 \quad \forall \lambda_1^* \neq 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \lambda_2} = 1 - \sum_{\forall i=1,2} \xi^{*i} = 0 \quad \forall \lambda_2^* \neq 0 \quad (26)$$

Re-arrange the first order conditions to show

$$\tau_c^{*i} = 1 - \frac{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\lambda_1^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad (27)$$

Re-arrange terms from the first order conditions to show that the formulas for tax revenue sharing are characterized as follows:

$$\xi^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i} \quad \forall i = 1, 2 \quad (28)$$

The implied public transfers for residents in each district are

$$T_c^{*i} = \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1, 2 \quad (29)$$

And the national effort to redistribute income in the economy,  $B_c^{*i} = \sum_{\forall i=1,2} T_c^{*i}$ , is

$$B_c^* = \sum_{\forall i=1,2} T_c^{*i} = \frac{1}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1,2 \quad (30)$$

Proposition 2 characterizes the equilibrium levels of taxation and spending for local governments for an economy with tax coordination and revenue sharing. The optimal level of the income tax  $\tau_c^*$  is explained by the national distribution of welfare costs from taxation (this term is  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i$  in condition 17), the ability of the income tax to raise tax revenue (this term is  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i$  in condition 17), and the national distribution of social marginal benefits from redistribution  $\lambda_1^*$ . Under tax revenue sharing, optimality requires that the social marginal benefits from the funds allocated in district one must be equal to the social marginal benefits of funds allocated in district two (see condition 23).<sup>9</sup>

Moreover, the shares of funds to be allocated in district  $i$ ,  $\xi^{*i} \forall i = 1,2$ , depend only on the ratio between the distribution of the social marginal benefits from public transfers in district  $i$  in relation to the national distribution of social marginal benefits from public transfers (see condition 18).<sup>10</sup> The size of the public transfer for a resident in district  $i$  depends on the share of funds to be allocated in the district,  $\xi^{*i}$ , and the nationwide average wage  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i$ .

Propositions 1 and 2 also show that the national budget devoted to redistribute income by all governments is the same in the equilibrium with fiscally uncoordinated decentralized tax policies and the equilibrium with tax coordinated policies, that is,  $B_D^* = B_C^*$ . However the regional distribution of per-capita transfers under fiscal decentralization is generally different to that adopted under the equilibrium with tax revenue sharing. This difference is explained by two facts: first, under fiscal decentralization, state and local governments only consider the local distribution of preferences, while under the tax revenue sharing policy, what matters is the relative local benefits from public district redistribution in relation to the national benefits. Second, optimality conditions require that, under tax revenue sharing, the local marginal benefits from public redistribution must be equalized across

<sup>9</sup> This is an optimality condition that is not required under fiscal decentralization and it affects the regional distribution of public transfers.

<sup>10</sup> Note that the formulas for revenue sharing do not depend on the relative contribution of tax revenue of each district. This has important implications on the design of formulas for tax revenue sharing because in practice most formulas take into account how local governments contribute to the general fund of tax revenue.



districts while state and local governments under fiscal decentralization do not operate with this constraint.

Since the main distinction in our economy between the choice of fiscal institutions (decentralization versus tax revenue sharing) relies on the outcomes of the regional distribution in public transfers, in proposition 3, we identify conditions in which  $T_D^{*i} \geq T_c^{*i} \forall i$ .

**Proposition 3.** *If  $\xi^{*i} \in (0,1)$ :  $\xi^{*i} \leq \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}$  then <sup>11</sup>*

$$T_D^{*i} \geq T_c^{*i} \text{ and } T_D^{*-i} \leq T_c^{*-i} \tag{31}$$

**Proof.**

From our assumption,  $\xi^{*i} \leq \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}$  which implies

$\frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i \leq \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$ . Since  $T_c^{*i} = \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$  and  $T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$  it follows that  $T_D^{*i} \geq T_c^{*i}$ . Moreover,

$\xi^{*i} \leq \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i} \Rightarrow \xi^{*-i} \geq \frac{\int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i})w^{-i} dw^{-i}}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}$  which implies

$\frac{\xi^{*-i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i \geq \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i})w^{-i} dw^{-i}$  therefore  $T_D^{*-i} \leq T_c^{*-i}$ .

Propositions 1 to 3 show that the choice of fiscal institutions lead to differences in the regional allocation of public transfers due to the differences between decentralization and tax revenue sharing in the way that they aggregate the demands for public redistribution from their citizens. decentralization and tax revenue sharing aggregate differently the demands for public redistribution from citizens.<sup>12</sup> Moreover, proposition 3 shows that the difference between the regional distributions of per-capita transfers under

<sup>11</sup> When convenient, we will use the notation  $i, -i$  to characterize two different districts. Hence, if district  $i = 1$ , then district  $-i = 2$ .

<sup>12</sup> While fiscal decentralization only takes into account the demands for public redistribution from local households, tax revenue sharing takes into account the national distribution of the household's preferences for redistribution. Hence, these fiscal institutions aggregate the household's demands differently for public redistribution.

fiscal decentralization vis-à-vis tax revenue sharing depends on the relative distribution of the household's social marginal benefits from public redistribution and the distribution of income.<sup>13</sup> In particular, if the share that allocates tax revenue in district  $i$ ,  $\xi^{*i}$ , under tax revenue sharing is lower than the share of the average income in district  $i$  in relation to the national average

income, that is if  $\xi^{*i} < \frac{\int_{w^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{i=1,2} \int_{w^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}$  then  $T_D^{*i} > T_C^{*i}$  and  $T_D^{*-i} <$

$T_C^{*-i}$ . Hence, the per-capita transfer in district  $i$  (district  $-i$ ) is higher (lower) under a fiscally decentralized economy relative to the transfers adopted in an economy with tax revenue sharing.

This outcome might have important implications on the regional and nationwide efficacy of the government's effort to redistribute income. In particular, this outcome suggests that if there is a higher (lower) proportion of low income households in district  $i$  (relative the proportion of low income households in district  $-i$ ) then the government's redistributive program could be more (less) effective in redistributing welfare to the poor under a fiscally decentralized economy relative to the social welfare achieved in a centralized economy with a tax revenue sharing policy.

### 3. Inter-Regional Spillovers from Redistribution

There is a lot of literature in economics that consider the utility of individuals are interdependent (see Bergstrom 1995 among many others).<sup>14</sup> If preferences of a household are interdependent then an individual not only cares about his own consumption but also in the consumption of other individuals. In the context of indirect preferences, the well-being of a household not only depends on its own wage, income tax and public transfer but on another household's wage, income tax and public transfer which might be a resident of district  $i$  or district  $-i$ . If indirect preferences are interdependent among individuals residing in different districts then public redistribution would lead to inter-regional spillovers (a possibility first analyzed by Pauly 1973).<sup>15</sup> The interest of this paper is to analyze, precisely, the role of inter-regional spillovers that leads to coordination failures under fiscal decentralization,

<sup>13</sup> Recall that  $\xi^{*i}$  is the ratio between the social marginal benefits of income of residents of district  $i$  and the nationwide distribution of social marginal benefits of income.

<sup>14</sup> Bergstrom (1995) considers that preferences are interdependent when household members display feelings such as love, envy, etc.

<sup>15</sup> An intuitive case in which inter-regional spillovers of redistribution might arise is the case in which members of a family live in different districts. Family ties would explain why preferences of households with members living in different districts are interdependent.

while under the tax revenue sharing policy the effect of spillovers will be internalized.<sup>16,17</sup>

In this case, interdependent indirect preferences are given by  $v^i(w^i, \tau^i, T^i, w^{-i}, \tau^{-i}, T^{-i}) = \alpha^i \left\{ \ln(w^i(1 - \tau^i)) + \ln(T^i) + k^{-i} \left[ \ln(w^{-i}(1 - \tau^{-i})) + \ln(T^{-i}) \right] \right\}$  where  $k^{-i} \in (0,1)$  is a parameter measuring the extent of inter-regional spillovers explained by interdependent preferences where  $w^{-i}$  is the wage of a household living in district  $-i$ ,  $\tau^{-i}$  is a proportional income tax in district  $-i$ , and  $T^{-i}$  is a per household public transfer of the household in district  $-i$ .

For an economy with tax revenue sharing due to tax coordination, the indirect preferences for a household with wage  $w^i$  are  $v^i(w^i, w^{-i}, \tilde{\tau}_c, \xi^i, \xi^{-i} \tilde{B}_c) = \alpha^i \left\{ \ln(w^i(1 - \tilde{\tau}_c)) + \ln(\xi^i \tilde{B}_c) + k^{-i} \left[ \ln(w^{-i}(1 - \tilde{\tau}_c)) + \ln(\xi^{-i} \tilde{B}_c) \right] \right\} \forall i$  where  $\xi^i, \xi^{-i}$  are the shares from tax revenue to be allocated in districts  $i, -i$ ,  $\tilde{\tau}_c$  is the proportional income tax implemented under tax coordination policies, and  $\tilde{B}_c$  is the overall budget for public redistribution.<sup>18</sup>

Oates (1972) recognized that in a fiscally decentralized economy, local governments have no incentives to internalize inter-regional spillovers from redistribution. In this case, it is simple to show that the equilibrium conditions identified by proposition 1 remain unchanged. However, for an economy with tax revenue sharing, spillovers will be internalized. Proposition 4 characterizes the equilibrium tax,  $\tilde{\tau}_c^*$ , shares of tax revenue,  $\xi^{*i}$ , per-capita transfers,  $\tilde{T}_c^{*i} \forall i$ , and the overall budget for public redistribution  $\tilde{B}_c^*$ .

**Proposition 4.** *The optimal tax  $\tilde{\tau}_c^*$ , tax revenue sharing allocations  $\xi^{*i}$ , the size of public redistribution  $\tilde{T}_c^{*i} \forall i = 1,2$ , and the national budget on public redistribution,  $\tilde{B}_c^*$ , for an economy with tax coordinated policies and spillovers from redistribution are:*

<sup>16</sup> Since the seminal work of Oates (1972) there has been a great deal of interest in literature on fiscal federalism devoted to local public goods with spillovers. This is why we are also interested in developing a comparative analysis of fiscal institutions (decentralization versus tax revenue sharing) in the context of public transfers.

<sup>17</sup> The interdependence of preferences with members of a family who live in the same district also lead to spillovers. However these externalities are contained in the district. The conclusions of the previous section remain basically unchanged. For this reason, in this section, we emphasize the analysis of inter-regional spillovers.

<sup>18</sup> The indirect utility  $v^i(w^i, w^{-i}, \tilde{\tau}_c, \xi^i, \xi^{-i} \tilde{B}_c)$  is obtained by using  $\tilde{T}^i = \xi^i \tilde{B}_c \forall i$  and  $\tau^i = \tau^{-i} = \tilde{\tau}_c$  in the indirect utility function.

$$\tilde{\tau}_c^* = 1 - \frac{\Phi^i + \Phi^{-i}}{\lambda_1^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad (32)$$

Where  $\Phi^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i}$  is the distribution of the social marginal benefits from public transfers for residents in district  $i$  and its spillovers effects in district  $-i$ , and a similar interpretation is given to

$$\Phi^{-i} = \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} + k^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i.$$

The formulas for tax revenue sharing are given by:

$$\tilde{\xi}^{*i} = \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}} \quad \forall i, -i \quad (33)$$

The implied public transfers for residents in each district are:

$$\tilde{T}_c^{*i} = \frac{\tilde{\xi}^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1,2 \quad (34)$$

And the national budget for public redistribution  $\tilde{B}_c^{*i} = \sum_{\forall i=1,2} \tilde{T}_c^{*i}$ , is

$$\tilde{B}_c^* = \sum_{\forall i=1,2} \tilde{T}_c^{*i} = \frac{1}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i = 1,2 \quad (35)$$

**Proof.**

The problem of a tax policy design and a tax revenue sharing policy design for an economy with spillovers from redistribution can be characterized by the following Lagrangian

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_c(w^i, w^{-i}, \tilde{\tau}_c, \tilde{\xi}^i, \tilde{\xi}^{-i}, \tilde{B}_c) &= \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i v^i(w^i, w^{-i}, \tilde{\tau}_c, \tilde{\xi}^i, \tilde{\xi}^{-i}, \tilde{B}_c) dw^i \\ &+ \tilde{\lambda}_1 \left[ \tilde{\tau}_c \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i - \tilde{B}_c \right] + \tilde{\lambda}_2 \left[ 1 - \sum_{\forall i=1,2} \tilde{\xi}^i \right] \end{aligned} \quad (36)$$

In condition (36),  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  are Lagrange multipliers. The first order conditions are given by:

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \tilde{\tau}_c} = \left( \frac{-1}{1 - \tilde{\tau}_c^*} \right) \{ \Phi^i + \Phi^{-i} \} + \tilde{\lambda}_1^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i = 0 \quad \forall \tilde{\tau}_c^* > 0 \quad (37)$$

Where  $\Phi^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i}$  and  $\Phi^{-i} = \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} + k^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \tilde{\xi}^i} = \left( \frac{1}{\tilde{\xi}^{*i}} \right) \Phi^i - \tilde{\lambda}_2^* = 0 \quad \forall \tilde{\xi}^{*i} > 0 \quad \forall i \quad (38)$$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \tilde{B}_c} = \left( \frac{1}{\tilde{B}_c^*} \right) \{ \Phi^i + \Phi^{-i} \} - \tilde{\lambda}_1^* = 0 \quad \forall \tilde{B}_c^* > 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \tilde{\lambda}_1} = \tilde{\tau}_c^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i - \tilde{B}_c^* = 0 \quad \forall \tilde{\lambda}_1^* \neq 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial \tilde{\lambda}_2} = 1 - \sum_{\forall i=1,2} \tilde{\xi}^{*i} = 0 \quad \forall \tilde{\lambda}_2^* \neq 0 \quad (41)$$

Re-arrange first order conditions to show

$$\tilde{\tau}_c^* = 1 - \frac{\Phi^i + \Phi^{-i}}{\tilde{\lambda}_1^* \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad (42)$$

Also re-arrange terms to show that the formulas for tax revenue sharing are:

$$\tilde{\xi}^{*i} = \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}} \quad \forall i \quad (43)$$

The implied public transfers for residents in each district are:

$$\tilde{T}_c^{*i} = \frac{\tilde{\xi}^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i \quad (44)$$

Therefore, the national budget for public transfers in the government,  $\tilde{B}_c^* = \sum_{\forall i=1,2} \tilde{T}_c^{*i}$ , is

$$\tilde{B}_c^* = \sum_{\forall i=1,2} \tilde{T}_c^{*i} = \frac{1}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i \quad (45)$$

Proposition 4 shows that the equilibrium level of the income tax  $\tilde{\tau}_c^*$  is explained (see condition 42) by the distribution of direct welfare costs and the spillovers welfare costs from taxation (this is the term  $\Phi^i + \Phi^{-i}$  in condition 42), the ability of the income tax to raise revenue (which is given by the national average wage  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i$ ) and the national social marginal benefits provided by the redistributive program  $\tilde{\lambda}_1^*$ .

An important difference with the model of this section, relative to the model of tax revenue sharing in section 2.2, is that the share of funds to be allocated in each district  $\xi^{*i} \forall i = 1,2$  depends on the ratio between the distribution of the social marginal benefits from public transfers for residents in district  $i$  and its spillovers effects in district  $-i$ ,  $\Phi^i$ , in relation to the overall (direct plus the spillovers) effects of transfers in district  $i$  and  $-i$ ,  $\Phi^i + \Phi^{-i}$ , (see condition 43). Condition (44) also says that  $\tilde{T}_c^{*i}$  depends on the share of funds to be allocated in district  $i$ ,  $\xi^{*i}$ , and the national average wage  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i$ .

Proposition 4 also shows that the nationwide budget devoted to redistribute income by the government for an economy with spillovers from public redistribution is the same as the equilibrium budget for an economy with tax coordination in which redistribution does not show spillovers, that is  $B_c^* = \tilde{B}_c^*$ . However, proposition 5, identifies conditions in which the regional distribution of tax revenue sharing, and therefore the regional allocation of per-capita transfers, for economies *with tax coordination with and without spillovers* are different. That is, proposition 5 identifies conditions in which the share of tax revenue allocated in district  $i$  (relative district  $-i$ ) is  $\xi^{*i} \underset{<}{\geq} \tilde{\xi}^{*i}$  and therefore  $T_c^{*i} \underset{<}{\geq} \tilde{T}_c^{*i}$ .

**Proposition 5.** *If*

$$k^i \left( \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \right)^2 \underset{<}{\geq} k^{-i} \left( \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \right)^2$$

*then*  $\xi^{*i} \underset{<}{\geq} \tilde{\xi}^{*i}$ .

**Proof.**

See appendix 1.

Proposition 5 identifies conditions that explain the relative proportion of funds to be allocated in district  $i$  for economies with and without spillovers from public redistribution. While spillovers from public transfers in district  $i$  create the rationale for an increase in the amount of resources to be allocated in the district (because spillovers from redistribution increase the national level of social marginal benefits from public transfers in district  $i$ ), the actual formula for the allocation of tax revenue in district  $i$ ,  $\xi^{*i}$ , depends, not on the level of national social marginal benefits, but on the ratio between the distribution of the national social marginal benefits from public transfers for residents in district  $i$  and its spillover effect in district  $i$ ,  $\Phi^i$ , in relation to the overall (direct plus the spillovers) effects of transfers in district  $i$  and  $-i$ ,  $\Phi^i + \Phi^{-i}$ , (see condition 43). Simultaneously, the share of tax revenue to be allocated in district  $i$  for an economy in which redistribution *does not show spillovers*,  $\xi^{*i}$ , depends only on the ratio between the distribution of the social marginal benefits from public transfers for residents in district  $i$  in relation to the national social marginal benefits from public transfers in district  $i$  and  $-i$ , (see proposition 2, condition 18). Hence, the differences between  $\xi^{*i}$  and  $\xi^{*i}$  are explained by the asymmetric regional distribution of spillovers (ingeneral  $k^i \neq k^{-i}$  and  $\int_{\underline{w}}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i \neq \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i})\Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i}$ ). Under the condition identified in proposition 5, the tax revenue allocated in district  $i$  for economies with and without spillovers from public transfers is  $\xi^{*i} \underset{<}{\geq} \xi^{*i}$  which implies  $T_c^{*i} \underset{<}{\geq} \tilde{T}_c^{*i}$ .

Next, proposition 6 compares the regional distribution of per-capita transfers between economies *with tax revenue sharing* and *fiscal decentralization* for the case in which public transfers show inter-regional spillovers.

**Proposition 6.** *If*

$$\xi^{*i} \in (0,1): \quad \xi^{*i} = \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}} < \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i} \tag{46}$$

*Then*

$$T_D^{*i} \underset{>}{\leq} T_c^{*i} \quad \text{and} \quad T_D^{*-i} \underset{>}{\leq} T_c^{*i} \tag{47}$$

**Proof.**

From our assumption  $\xi^{*i} = \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}} < \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}$ ,

then  $\frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i < \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$ .

Since  $\tilde{T}_c^{*i} = \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$  and  $T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$

it follows that  $T_D^{*i} > \tilde{T}_c^{*i}$ .

Moreover,  $\xi^{*i} < \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i} \Rightarrow \xi^{*-i} > \frac{\int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i})w^{-i} dw^{-i}}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}$

which implies  $\frac{\xi^{*-i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i > \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i})w^{-i} dw^{-i}$

Therefore,  $T_D^{*-i} < \tilde{T}_c^{*-i}$ .

Proposition 6 shows that the difference between the distribution of per-capita transfers under fiscal decentralization and tax revenue sharing when public transfers display inter-regional spillovers depends on the relative distribution of household’s preferences, the distribution of spillovers from public redistribution, and the distribution of income. If the formula that allocates tax revenue in district  $i$ ,  $\xi^{*i}$ , under an agreement of tax revenue sharing is lower than the ratio between the average wage of residents of district  $i$  and the

national average wage, that is if  $\xi^{*i} < \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}$ , then  $T_D^{*i} > \tilde{T}_c^{*i}$

and  $T_D^{*-i} < \tilde{T}_c^{*-i}$ . Hence, the per-capita transfer in district  $i$  (district  $-i$ ) is higher (lower) under a fiscally decentralized economy relative to the transfers adopted in a tax revenue sharing agreement.

**4. Social Choice Between Decentralization Versus Tax Revenue Sharing**

In this section we develop a social welfare analysis of the society’s choice between decentralization and tax revenue sharing. Our approach is to compare the society’s welfare under decentralization with the corresponding welfare of the society under tax revenue sharing. To state the main result of this section, we define  $\Omega_c^i \alpha^i$  as the social marginal utility of income of a household living in district  $i$  with wage  $w^i$  which is the product between,  $\Omega_c^i$ , the social marginal utility of a household living in district  $i$  with wage  $w^i$  and its corresponding marginal utility of income  $\alpha^i$ .



We also define the ratio  $T_j^{*i}/B_j^*$  where  $T_j^{*i}$  is the per capita transfer in district  $i$  under fiscal institution  $j = \{\text{descentralization, tax revenue sharing}\}$ , over the size of resources devoted for public redistribution  $B_j^*$ . From conditions (3) and (5) of proposition 1, (see also table 1 in the appendix 2), we show that for economies with and without spillovers, the equilibrium condition for the share of resources for redistribution in each district under fiscal decentralization is given by  $T_D^{*i}/B_D^* = s_D^{*i}$  where

$$s_D^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i} \quad \forall i \text{ is the share of per capita income of district } i$$

in relation to the per capita income of the economy.

For an economy with tax revenue sharing and no spillovers, the share of resources devoted for redistribution in the region  $i$ ,  $T_C^{*i}/B_C^* = \xi^{*i}$ , is given by

$$\xi^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i} \quad \forall i, \text{ where } \xi^{*i} \text{ is determined by the share of the}$$

average social marginal utility of households in district  $i$ ,  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i$ , in relation to the national average social marginal

utility of all households in the economy,  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i$ .<sup>19</sup> If the

economy shows spillovers then  $\xi^{*i} = \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}} \quad \forall i$  where

$$\Phi^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i})\Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \quad \forall i.$$

Lastly, we define  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i]$  as the normalized covariance between the social marginal utility of income of a household  $\Omega_c^i \alpha^i$  and  $\phi^i$  which is the difference between the share of resources devoted for redistribution in the region  $i$  under decentralization,  $T_D^{*i}/B_D^*$  and the share of resources devoted for redistribution in the region  $i$  under tax revenue sharing,  $T_C^{*i}/B_C^*$  since  $\phi^i = \ln(T_D^{*i}/B_D^*) - \ln(T_C^{*i}/B_C^*) = \ln(s_D^{*i}) - \ln(\xi^{*i})$ . Proposition 7 characterizes conditions in which tax revenue sharing dominates (is dominated by) decentralization.

---

<sup>19</sup> To see this, note that  $\Omega_c^i \alpha^i$  is the social marginal utility of income for a family with a wage of  $w^i$  and  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i$  is the average social marginal utility of income of households in district  $i$  while  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i$  is the average social marginal utility of the economy.

**Proposition 7.** We define  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i]$  as a normalized covariance between the social marginal utility of income of a household living in district  $i$  with wage  $w^i$ ,  $\Omega_c^i \alpha^i$ , and  $\phi^i = \ln(s_D^{*i}) - \ln(\xi^{*i})$  which is related to the difference between the shares of income in district  $i$  in relation to the economy and the share of social marginal utility of income of district  $i$  with respect the social marginal utility of income of the economy. Then

$$7.1) \text{ If } \sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i] \geq - \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i < 0$$

then decentralization is socially preferred to tax revenue sharing

$$7.2) \text{ If } \sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i] < - \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i < 0$$

then tax revenue sharing is socially preferred to decentralization

**Proof.**

The equilibrium conditions for decentralization are  $\tau_D^{*i} = \tau_D^{*-i} = \frac{1}{2} \quad \forall i$  and  $T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i$  while the equilibrium conditions for tax revenue sharing are  $\tau_c^* = \tau_c^{*i} = \tau_c^{*-i} = \frac{1}{2}$  and  $T_c^{*i} = \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i$ . The society's welfare under decentralization is given by

$$\Psi_D = \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i v^i(w^i, \tau_D^{*i}, T_D^{*i}) dw^i =$$

$$\Psi_D = \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \alpha^i \left\{ \ln\left(\frac{w^i}{2}\right) + \ln\left(\frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i}{2}\right) \right\} dw^i \quad (48)$$

And the society's welfare under tax revenue sharing is

$$\Psi_c = \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i v^i(w^i, \tau_c^{*i}, T_c^{*i}) dw^i$$

$$\Rightarrow \Psi_c = \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i \left\{ \ln\left(\frac{w^i}{2}\right) \right\} dw^i +$$

$$+ \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i \left\{ \ln \left( \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \right) \right\} dw^i \quad (49)$$

Therefore decentralization is preferred to tax revenue sharing if  $\Psi_D - \Psi_c > 0$ , and tax revenue sharing is preferred if  $\Psi_D - \Psi_c < 0$ . And

$$\Psi_D - \Psi_c = \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \alpha^i \phi^i dw^i \quad (50)$$

Where

$$\phi^i = \ln(T_D^{*i}/B_D^*) - \ln(T_C^{*i}/B_C^*) = \ln(s_D^{*i}) - \ln(\xi^{*i}) \quad (51)$$

By definition of a covariance  $\sigma[X, Y]$  between variables  $X$  and  $Y$ ,  $\sigma[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ , state condition (50) as follows:

$$\begin{aligned} & \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \alpha^i \phi^i dw^i = \sigma[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i] + \\ & + \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \phi^i dw^i \end{aligned} \quad (52)$$

Define the normalized covariance  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i]$  between  $\Omega_c^i \alpha^i$  and  $\phi^i$  as follows:

$$\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i] = \frac{\sigma[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i]}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \phi^i dw^i} \quad (53)$$

Therefore, from (50), (52) and (53),  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i] \geq - \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i < 0$  implies  $\Psi_D \geq \Psi_c$ .

Proposition 7 says that if the normalized covariance  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i]$  between the social marginal utility of income of a household living in district  $i$  with wage  $w^i$ ,  $\Omega_c^i \alpha^i$ , and  $\phi^i = \ln(s_D^{*i}) - \ln(\xi^{*i})$  which is the natural log of the difference between the shares of income in district  $i$  in relation to the economy and the share of the social marginal utility of income of district  $i$  with respect to the social marginal utility of income of the economy is significantly negative (that is if  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i] < - \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i < 0$ ) then tax revenue sharing welfare dominates decentralization.

The intuition behind these results is straightforward: One of the main predictions of our model is that tax revenue sharing will allocate a different amount of resources for public redistribution in each district relative the institution of fiscal decentralization. This means that if we change from tax revenue sharing to decentralization then the size of per capita transfers to the poor corresponding to the local government will increase in some regions and will decrease in other regions. If the per capita transfer increases in region  $i$  then the welfare of residents of this district will also increase, which in turn becomes the welfare benefit to motivate a change from a tax revenue sharing policy to a decentralization policy. Simultaneously, if the per capita transfer decreases in other regions, say regions  $-i$ , then the welfare of the residents of districts  $-i$  will also decrease which in turn becomes the welfare cost to move from tax revenue sharing to decentralization.

Condition (7.2) says that if the normalized covariance  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i]$  is significantly negative then tax revenue sharing welfare dominates decentralization because, as a result of a change from tax revenue sharing to decentralization, the size of the government's transfers decrease (increase) in districts with higher (lower) than average marginal social utilities of income. In this case, the welfare cost outweighs the benefit from changing from a tax revenue sharing policy to a decentralization one (this is condition 7.2 in proposition 7).

Similarly, condition (7.1) identifies examples in which decentralization welfare dominates tax revenue sharing. An example is that if the normalized covariance  $\sigma_N[\Omega_c^i \alpha^i, \phi^i]$  is positive then those districts who gain by having a higher size of per capita transfers (due to a change from tax revenue to decentralization) are precisely those districts with higher than average marginal social utility of income in the economy's social welfare function. As a result, the welfare gains from those districts resulting from a higher size of per capita transfers (associated with a change from tax revenue to decentralization) outweigh the loss in welfare of districts in which the per capita transfers will decrease as a result of a change from tax revenue to decentralization. The net result will be that the society's welfare will increase if the economy shifts from tax revenue sharing to fiscal decentralization.

## 5. Calibration of the Model

In this section we calibrate the model to highlight the differences in the inter-regional allocation of resources to redistribute income under fiscal decentralization and tax revenue sharing. In table 1, see the appendix 2, we show the equilibrium conditions of the tax rate, the per-capita public transfer for each state or local government, the size of resources designated for public redistribution in the economy, and the shares of resources for public redistribution allocated in each district for economies with fiscal

decentralization and tax revenue sharing. Our model predicts that the tax rates and the size of resources devoted for public redistribution would be the same under decentralization and tax revenue sharing, while the inter-regional allocation would be different under these institutions.<sup>20</sup>

Our model makes predictions on the per capita transfers in each district and on the shares of resources from redistribution designated to each district. Section 4 also shows that the welfare analysis of the society's choice between decentralization and tax revenue sharing depends critically on the different allocations between these two fiscal institutions of the shares of resources assigned for public redistribution in each district. Hence the calibration of our model is primarily focused on the shares of resources from redistribution allocated in each district.

As we mentioned before, the ratio  $T_j^{*i}/B_j^*$  where  $T_j^{*i}$  is the per capita transfer in district  $i$  under fiscal institution  $j = \{\text{decentralization, tax revenue sharing}\}$ , over the size of resources designated for public redistribution  $B_j^*$ . From conditions (3) and (5) of proposition 1, (see also table 1 in the appendix 2), we show that under fiscal decentralization, the equilibrium condition for the share of resources for

redistribution in each district is given by  $\frac{T_D^{*i}}{B_D^*} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i} \quad \forall i$

which is the share of per capita income of district  $i$  in relation to the per capita income of the economy. To calibrate  $\frac{T_D^{*i}}{B_D^*}$  we use the distribution of per capita state income for Mexico from the Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) for the year 2014.

For an economy with tax revenue sharing, the ratio of resources designated for redistribution in the region  $i$  is given by

---

<sup>20</sup> Indeed, for an economy without spillovers, table 1 shows the equilibrium conditions for the tax rate under decentralization which is given by  $\tau_D^{*i} = \tau_D^{*-i} = \frac{1}{2}$ , while the equilibrium tax rate under tax revenue sharing is  $\tau_c^* = \tau_c^{*i} = \tau_c^{*-i} = \frac{1}{2}$ . Moreover, the amount of resources designated for public redistribution under decentralization,  $B_D^*$ , and tax revenue sharing,  $B_c^*$ , are  $B_D^* = B_c^* = \frac{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i}{2}$ . In addition, the per capita transfer in district  $i$  under decentralization is  $T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i \quad \forall i$  while under tax revenue sharing  $T_c^{*i} = \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)w^i dw^i$  with  $\xi^{*i} \in (0,1)$ . Similar results are given for an economy with spillovers, see table 1.

$$\frac{T_C^{*i}}{B_C^*} = \xi^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i} \quad \forall i,$$
 where  $\frac{T_C^{*i}}{B_C^*}$  is determined by the share of the average social marginal utility of households in district  $i$ ,  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i$ , in relation to the national average social marginal utility of all households in the economy,  $\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i$ . To calculate  $T_C^{*i}/B_C^*$  we need to calibrate values for the social marginal utility of income  $\Omega_c^i \alpha^i$  of a household living in district  $i$  with wage  $w^i$  which is the product between,  $\Omega_c^i$ , the social marginal utility of a household living in district  $i$  with wage  $w^i$  and its corresponding marginal utility of income  $\alpha^i$ .

To do so, we follow the classical treatment on optimal taxation from Atkinson and Stiglitz (1976) and consider that  $\Omega_c^i \alpha^i$  is an inverse function of income. There are several reasons why this assumption is appealing: first, the marginal utility of income might be decreasing with income which implies that the lower the income of the household, the higher the marginal utility of income  $\alpha^i$ , and the higher  $\Omega_c^i \alpha^i$ . Second, policy makers might be concerned with the well being of households with low income. Hence, the lower the income of the household, the higher the social marginal utility of the household in the welfare function  $\Omega_c^i$  and the higher  $\Omega_c^i \alpha^i$ .

Thus, to calibrate the average social marginal income of households in district  $i$ ,  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i \quad \forall i$ , we use two different approaches: first, we use the inverse of the per capita income in each state, and second we use a Paretian distribution of income which captures the inequality in the distribution of income observed in modern economies. In our first approach, to estimate the average social marginal utility of income in each state, we use the inverse of the per capita income at the state level with data from INEGI 2014 (see table 2 in the appendix 2). Therefore,  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i)\Omega_c^i \alpha^i dw^i = \frac{1}{Y_i^p}$  where  $Y_i^p$  is per capita income in state  $i$ .

In the case of the Paretian distribution, we use the probability distribution function of the Paretian distribution given by

$$\frac{T_C^{*i}}{B_C^*} = \begin{cases} \frac{\theta(Y_{min}^p)^\theta}{Y_i^p} & \text{for } \theta > 0, Y_i^p \geq Y_{min}^p \text{ and } Y_{min}^p = \min\{Y_i^p\}_{\forall i} \\ 0 & \text{for } Y_i^p < Y_{min}^p \end{cases} \quad (46)$$

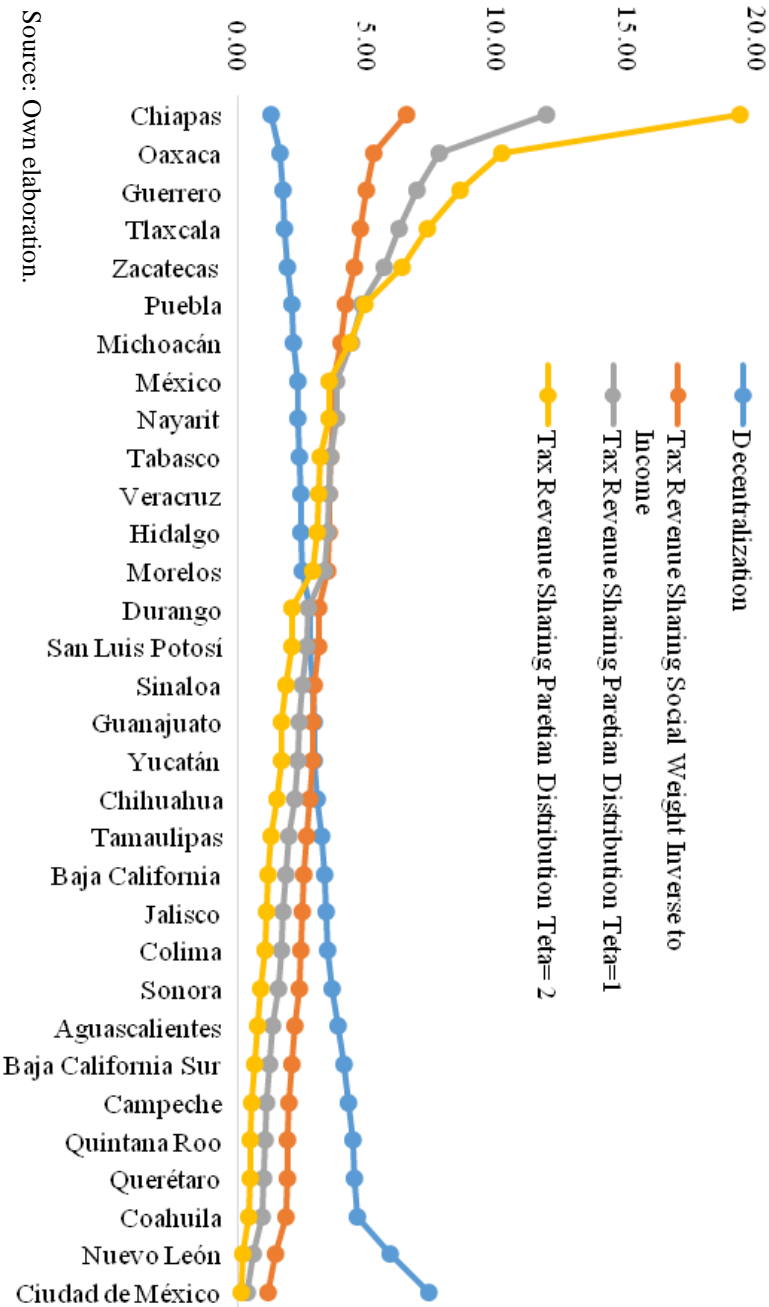
Where  $Y_i^p$  is per capita income in state  $i$ ,  $\theta > 0$  is a scale parameter of the Paretian distribution that captures the preference for inter-regional equity of a benevolent social planner (the higher  $\theta$  the higher the preference for achieving a more equitable allocation of inter-regional resources) and  $Y_{min}^p = \min\{Y_i^p\}_{\forall i}$ .

For a comparison of our calibration example between the share of resources for redistribution allocated at the state level under fiscal decentralization and tax revenue sharing for an economy without inter regional spillovers see graph 1 and table 2 of the appendix 2. The share of resources by district under tax revenue sharing,  $T_C^{*i}/B_C^*$ , is calculated in three different cases: as we mentioned before, the first case estimates the average social marginal utility of income of households in each district through the inverse of the per capita state income and in the other two cases we use the Paretian distribution function for values of  $\theta = 1$  and  $\theta = 2$ .

Our results show a sharp distinction between the resources allocated for public redistribution under the institutions of fiscal decentralization and tax revenue sharing. Under decentralization, the districts with more resources devote a higher proportion of the economy's resources for redistribution. This is because the higher the per capita income in the state, the higher the equilibrium level of  $T_D^{*i}$  implying higher levels of  $T_D^{*i}/B_D^*$  (see condition 3 in proposition 1). Our analysis suggests that under fiscal decentralization, the three sub national governments with the lowest per capita income would allocate only 4.6% of the economy's resources for redistribution while the three sub national governments with the highest per capita income would allocate 17.84% of the economy's resources for redistribution.

In contrast to the institution of fiscal decentralization, that will not minimize the inter-regional inequality of income, under tax revenue sharing the issue of inter-regional equity becomes an important objective of public policy. Therefore, an optimal policy of tax revenue sharing will allocate significant resources to those regions with high social marginal utility of income and, therefore, more resources might be allocated to districts with low income. The preference for inter-regional equity is more prominent in the Paretian distribution with  $\theta = 2$ , since our model suggests that the three sub national governments with the lowest per capita income would receive 38% of the economy's resources for redistribution.

Graph 1  
 Shares of Resources for Redistribution under Decentralization and Tax Revenue Sharing.  
 Case 1: No Inter-Regional Spillovers



Source: Own elaboration.



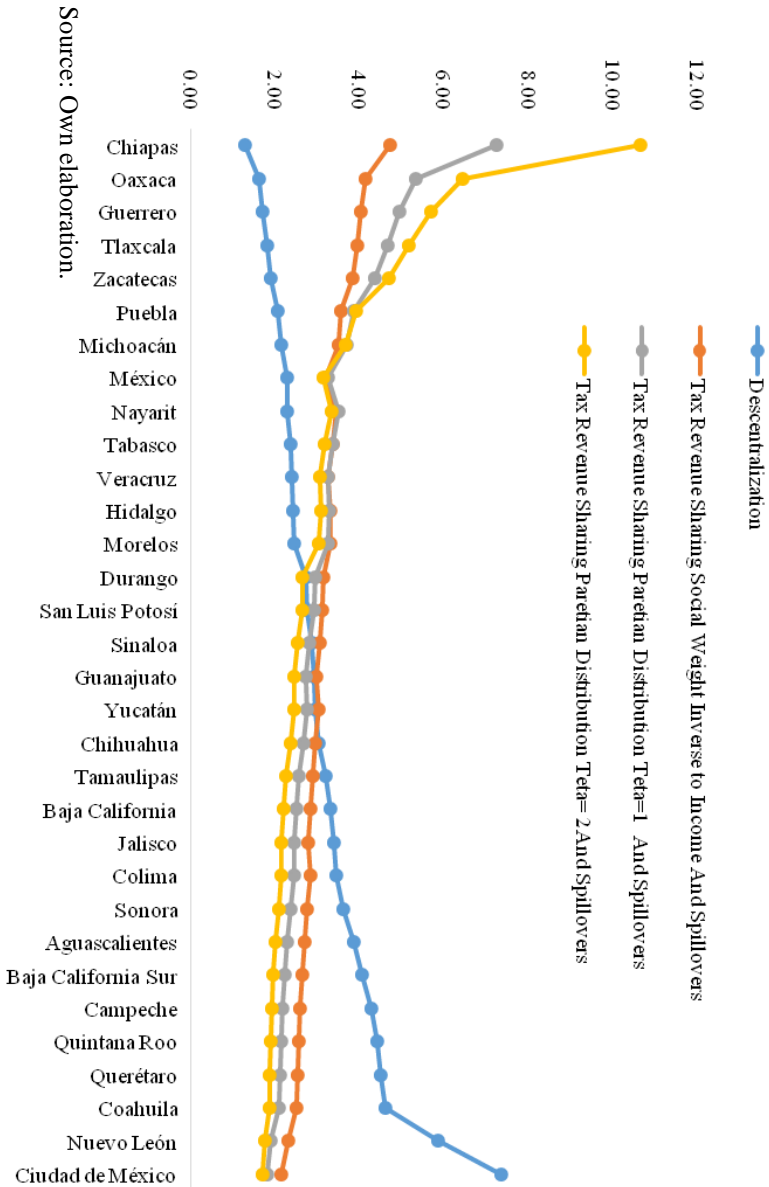
Under the Paretian distribution with  $\theta = 1$ , the three sub national governments with the lowest per capita income would receive 26.5%, and under the social welfare function in which the marginal social utility of income is inversely related to per capita income they would receive 16.7% of the economy's resources for redistribution. For the three states with the highest per capita income they would receive, respectively, the 0.7% under the Paretian distribution with  $\theta = 2$ , 2.2% under the Paretian distribution with  $\theta = 1$ , and 4.4% of the economy's resources for redistribution if the marginal social utility of income is inversely related to per capita income.

For an economy with inter regional spillovers we need to estimate the extent of the spillovers. In the context of redistribution, inter-regional spillovers might arise because of an inter-dependence of the well being of households living in different regions (for instance a father who lives in region  $i$  who cares for the well being of a relative who lives in region  $-i$  and vice versa). In this context, spillovers occur when a household living in region, say  $-i$ , receives public transfers and the household living in region  $i$  cares about the well being of the household which benefits in region  $-i$  from the public redistribution. In this case, we say that there is an spillover effect from the public redistribution implemented in region  $-i$ .

In this paper we assume that the higher the population in a state, the higher the chances for the existence of an interdependent utility function with individuals in other regions. This implies, that the higher the population in the state, the higher is the rate of spillovers of that state over other regions. Therefore, we calibrate the extent of inter-regional spillovers from redistribution with the density of population at the state level using data from the "Censo 2010" provided by INEGI. For an economy with inter regional spillovers, our calculations are displayed in graph two (see below) and in Table 3 in the appendix 2.

In this economy, fiscal decentralization is a better mechanism to incorporate the inter-regional heterogeneity of preferences for public policy than tax revenue sharing. However, redistribution under tax revenue sharing has two important advantages over decentralization: first, redistribution with spillovers will be Pareto efficient under tax revenue sharing while Pareto inefficient under decentralization. Second, tax revenue sharing leads to a social welfare gain (relative decentralization) due to a more equitable inter-regional allocation of resources.

**Graph 2**  
**Shares of Resources for Redistribution under Decentralization and Tax Revenue. Case 2: With Spillovers**



The distribution of  $T_D^{*i}/B_D^*$  under spillovers is the same as in the case of no spillovers (since fiscal decentralization does not incorporate the spillover effects from redistribution). As we mentioned before, under decentralization, those districts with more resources designate a higher proportion of the economy's resources for redistribution. The model suggests that the three sub national governments with the lowest per capita income would receive only 4.6% of the economy's resources for redistribution while the three sub national governments with the highest per capita income would use 17.84% of the economy's resources for redistribution.

Under tax revenue sharing with spillovers from redistribution, the three sub national governments with the lowest per capita income would receive 22.7% of the economy's resources for redistribution under the Paretian distribution with  $\theta = 2$ , the 17.5% under the Paretian distribution with  $\theta = 1$ , and the 12.9% of the economy's resources for redistribution under the social welfare function in which the marginal social utility of income is inversely related to per capita income. For the three states with the highest per capita income they would receive, respectively, the 5.3% under the Paretian distribution with  $\theta = 2$ , 5.8% under the Paretian distribution with  $\theta = 1$ , and 6.9% of the economy's resources for redistribution if the marginal social utility of income is inversely related to per capita income.

In summary, under fiscal decentralization, the distribution of shares of resources allocated for redistribution is positively related with the state's own resources. Poor households benefit from a higher amount designated to public redistribution if the household lives in states with high per capita income. In contrast, an equitable allocation of resources across states is an important goal of policy making under tax revenue sharing. Therefore, tax revenue sharing is likely to redistribute more resources to states with lower than average income. As a result, the distribution of shares of resources allocated for redistribution is negatively related with the state's own resources. Poor households benefit from a higher amount designated to public redistribution if the household lives in states with low per capita income.

The calibration of the model also suggests that there are significant differences in the shares of resources allocated for redistribution for economies with and without spillovers. In particular, our model suggests that, if policy makers take into account not only inter-regional equity but also inter-regional efficiency in the allocation of resources for redistribution, then the amount of resources allotted to redistribution by the states with the lowest per capita income is lower in the case of spillovers relative to the case of no spillovers.

To see this (see table 4 in the appendix 2), note that, in the case of no spillovers, the three sub national governments with the lowest per capita income would receive 38% of the economy's resources for redistribution, under the Paretian distribution with  $\theta = 2$  while in the case of spillovers they would receive 22.7%. In the case of a Paretian distribution with  $\theta = 1$ , the three sub national governments with the lowest per capita income and no spillovers would receive 26.5% and with spillovers they would receive 17.5%, and under the social welfare function in which the marginal social utility of income is inversely related to per capita income with no spillovers they would receive 16.7%, and in the case of spillovers, 12.9% of the economy's resources for redistribution.

## **6. Discussion of the Results and Implications for Policy Design**

In this paper we study the size and regional distribution of public transfers with and without spillovers under two different fiscal institutions: fiscal decentralization (in which failures of coordination among sub-national governments might arise) versus tax revenue sharing as a coordination tax policy among different tiers of governments. It is worthwhile to develop such a comparative analysis because it is empirically relevant and, more importantly, because knowing the effect of different forms of fiscal institutions related to the efficiency of the government's programs would help us to identify potential advantages and shortcomings of feasible policy options.

The main predictions of our theory are the following: first, surprisingly, our models find that the government's effort to redistribute income (the size of the national budget for public redistribution) is the same for both types of fiscal institutions. This finding is satisfied for economies with and without regional spillovers from public redistribution. Second, the choice of fiscal institutions lead to differences in the regional allocation of public transfers due to the decentralization and tax revenue sharing policies differently aggregating the demands for public redistribution. We show that the distribution of preferences from local spending and the distribution of income explain these differences.

To be more specific, for the case in which public redistribution does not show inter-regional spillovers, the size of public transfers under fiscal decentralization depend only on the average wage of the district while under tax revenue sharing depends on the national average wage and the share of funds to be allocated in the district which is given by the ratio between the distribution of social marginal benefits from public transfers in the district in relation to the national distribution of social marginal benefits. If the share of funds in the district in the tax revenue sharing agreement is lower (higher) than the share of the average wage in the district in relation to the national

average wage then the size of the per-capita public transfer received by a resident of the district under fiscal decentralization is higher (lower) than that received under the fiscal institution of tax revenue sharing.

Another relevant implication for policy design in our study is that the optimal formulas for revenue sharing do not depend on the relative contribution of tax revenue of each district (that is, the amount of tax revenue that is collected in each district). This outcome has important implications on the design of formulas for tax revenue sharing because in practice most countries design formulas that take into account how much tax revenue local governments contribute to a general fund. Our paper suggests that the optimal design of formulas should depend only on the district's relative distribution of marginal benefits in relation to the national marginal benefits of public spending.

In our model in which public transfers show spillovers, fiscal decentralization will not lead to Pareto efficient public transfers while the government's transfers under tax coordination and revenue sharing are Pareto efficient. Intuition might suggest that because revenue sharing internalizes inter-regional spillovers then the size of public transfers under coordinated tax policies would be higher relative to those transfers under fiscal decentralization. However, this is not necessarily the case. In this paper we identify conditions in which the opposite occurs.

Finally, for the case in which public redistribution shows spillovers, these outcomes suggest a tradeoff between efficiency and the regional size of public transfers.<sup>21</sup> This tradeoff could have important implications on the regional and national efficacy of the government's effort to redistribute income. In particular, if income inequality is concentrated in some key districts then the government's redistributive program could be more (less) effective in redistributing welfare to the poor under a fiscally decentralized economy relative to the social welfare achieved under a tax revenue sharing agreement.

## References

- [1] Atkinson, A.B. and J.E. Stiglitz. (1976). "The design of tax structure: Direct versus indirect taxation", *Journal of Public Economics* 6, 55-75.
- [2] Bergstrom, T. (1995). "A survey of theories of the family", In Rosenzweig, M.R., and O. Stark (Eds), *Handbook of Population and Family Economics*, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- [3] Boadway, R., and Keen, M. (1996). "Efficiency and the optimal direction for federal-state transfers", *International Tax and Public Finance*, 3(2), 137-155.
- [4] Johnson, W. R. (1988). "Income redistribution in a federal system", *American*

---

<sup>21</sup> This is to say that, under spillovers, tax revenue sharing leads to Pareto efficient transfers but at a smaller size in key districts compared with larger but Pareto inefficient transfers under fiscal decentralization.

*Economic Review*, 78(3): 570-573.

- [5] Keen, M. (1998). "Vertical tax externalities in the theory of fiscal federalism". *IMF Staff Papers*, 45,(3), 454-485.
- [6] Devereuxa M.P., Lockwood, B., Redoanao, M. (2007). "Horizontal and vertical indirect tax competition: Theory and some evidence from the USA". *Journal of Public Economics*, 91, (3-4), 451-479.
- [7] Kochi, I. and Ponce-Rodríguez, R.A. (2016), "Optimal formulas for subnational tax revenue sharing", *Theoretical Economics Letters*, 6, 808-818.
- [8] Martínez-Vazquez, J., Lago-Peñas, S., Sacchi, A. (2015), "The impact of fiscal decentralization: a survey", *GEN Working Paper A 2015-5*, 1-30.
- [9] Oates, Wallace E. (1972). *Fiscal Federalism*. New York: Harcourt, Brace, Jovanovich.
- [10] Pauly, M.V. (1973). "Income redistribution as a local public good", *Journal of Public Economics*, 2(1), 35-58.
- [11] Ponce-Rodríguez, R.A. Hankla, C.R., Martínez-Vazquez, J. and Heredia-Ortiz, E. (2016). "Political institutions and federalism: a "strong" decentralization theorem", *International Center for Public Policy*, Working Paper Series, AYSPPS, Georgia State University, paper1603.
- [12] Rao, M.G. (2007). "Resolving fiscal imbalances: issues in tax sharing" In R. A. Boadway and A. Shah (Eds), *Intergovernmental Transfers, Principles and Practice*, Washington, D.C: The World Bank.
- [13] Wilson, J.D. (1999). "Theories of tax competition", *National Tax Journal*, 52(2), 269-304.
- [14] Wilson, L.S. (2007), "Macro formulas for equalization", En Boadway, R. A. and Shah A. (Eds), *Intergovernmental Transfers, Principles and Practice*, Washington, D.C: The World Bank.

### Appendix 1

**Proposition 5.** *If*

$$k^i \left( \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \right)^2 \underset{<}{\overset{\geq}{\approx}} k^{-i} \left( \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \right)^2,$$

then  $\xi^{*i} \underset{<}{\overset{\geq}{\approx}} \xi^{*i}$ .

**Proof.**

Assume

$$k^i \left( \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \right)^2 \underset{<}{\overset{\geq}{\approx}} k^{-i} \left( \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \right)^2$$

Then add the term  $+k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i$  at both sides of the inequality to show

$$\begin{aligned} & k^i \left( \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \right)^2 \\ & \quad + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \underset{<}{\overset{\geq}{\approx}} \\ & k^{-i} \left( \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \right)^2 \\ & \quad + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \\ & \hspace{15em} \Rightarrow \end{aligned}$$

Now add the term  $\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i$  at both sides of the inequality to obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^i \left( \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \right)^2 \\ & \quad + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \underset{<}{\overset{\geq}{\approx}} \end{aligned}$$

$$\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \left[ \sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \right]$$

Re-arrange terms to show:

$$\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i \left[ \sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \right] \begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$$

$$\left[ \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \right] \sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i$$

Express the last equations as follows

$$\frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$$

$$\frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i}}{\sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i}}$$

Since  $\Phi^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i + k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i}$  and  $\Phi^{-i} = \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} + k^i \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i$ , use these definitions on the right hand side of the inequality

$$\frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{\forall i,-i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}}$$



Now

use

$$\xi^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{v_i, -i} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}$$

And

$$\tilde{\xi}^{*i} = \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}}$$

Therefore,

$$\xi^{*i} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \tilde{\xi}^{*i}$$

## Appendix 2

**Table 1**  
**Equilibrium Conditions under Fiscal Decentralization and Tax Revenue Sharing**  
**Case 1: No Spillovers**

	Policy Under Decentralization	Policy Under Tax Revenue Sharing
Tax Rate in District $i$	$\tau_D^{*i} = \tau_D^{*-i} = \frac{1}{2} \quad \forall i$	$\tau_c^* = \tau_c^{*i} = \tau_c^{*-i} = \frac{1}{2}$
Per-Capita Transfer in District $i$	$T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i$	$T_c^{*i} = \frac{\xi^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i$
Size of Resources Designated for Public Redistribution	$B_D^* = \frac{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i}{2}$	$B_c^* = \frac{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i}{2}$
Share of Overall Resources Designated for Redistribution in District $i$	$s_D^{*i} = \frac{T_D^{*i}}{B_D^*} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad \forall$	
Share of Overall Resources Designated for Redistribution in District $i$		$\xi^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i} \quad \forall i$

Source: Own elaboration.

**Table 1**  
**Equilibrium Conditions under Fiscal Decentralization and Tax Revenue Sharing**  
**Case 2: With Spillovers**

	Policy Under Decentralization	Policy Under Tax Revenue Sharing
Tax Rate in District $i$	$\tau_D^{*i} = \tau_D^{*-i} = \frac{1}{2} \quad \forall i$	$\tau_c^* = \tau_c^{*i} = \tau_c^{*-i} = \frac{1}{2}$
Per-Capita Transfer in District $i$	$T_D^{*i} = \frac{1}{2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i$	$\tilde{T}_c^{*i} = \frac{\tilde{\xi}^{*i}}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i$
Size of Resources for Public Redistribution	$B_D^* = \frac{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i}{2}$	$\tilde{B}_c^* = \frac{1}{2} \sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i \quad \forall i$
Share of Overall Resources for Redistribution in District $i$	$s_D^{*i} = \frac{\int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i}{\sum_{\forall i=1,2} \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) w^i dw^i} \quad \forall i$	
Share of Overall Resources for Redistribution in District $i$		$\tilde{\xi}^{*i} = \frac{\Phi^i}{\Phi^i + \Phi^{-i}} \quad \forall i$
		$\Phi^i = \int_{\underline{w}^i}^{\bar{w}^i} h^i(w^i) \Omega_c^i \alpha^i dw^i$
		$+ k^{-i} \int_{\underline{w}^{-i}}^{\bar{w}^{-i}} h^{-i}(w^{-i}) \Omega_c^{-i} \alpha^{-i} dw^{-i} \quad \forall i$

Source: Own elaboration.

**Table 2**  
**Share of Resources Designated for Redistribution by State Under**  
**Decentralization and Tax Revenue Sharing.**  
**Case 1: No Spillovers**

State	Decentralization $T_D^i/B_D^*$	Tax Revenue Sharing With Social Weight Inverse to Per-Capita Income $T_C^i/B_C^*$	Tax Revenue Sharing With Paretian Distribution Teta=1 $T_C^i/B_C^*$	Tax Revenue Sharing With Paretian Distribution Teta= 2 $T_C^i/B_C^*$
Chiapas	1.30	6.50	11.88	19.32
Oaxaca	1.61	5.25	7.74	10.17
Guerrero	1.71	4.95	6.89	8.54
Tlaxcala	1.80	4.69	6.19	7.27
Zacatecas	1.89	4.48	5.63	6.31
Puebla	2.06	4.12	4.76	4.90
Michoacán	2.15	3.95	4.38	4.32
México	2.30	3.69	3.82	3.52
Nayarit	2.30	3.68	3.81	3.52
Tabasco	2.38	3.56	3.55	3.16
Veracruz	2.40	3.53	3.50	3.09
Hidalgo	2.42	3.50	3.45	3.03
Morelos	2.46	3.44	3.33	2.86
Durango	2.74	3.09	2.68	2.07
San Luis Potosí	2.75	3.08	2.67	2.06
Sinaloa	2.86	2.97	2.47	1.83
Guanajuato	2.93	2.89	2.35	1.70
Yucatán	2.94	2.88	2.33	1.68
Chihuahua	3.04	2.79	2.19	1.53
Tamaulipas	3.21	2.64	1.95	1.29
Baja California	3.31	2.56	1.84	1.17
Jalisco	3.39	2.50	1.75	1.10
Colima	3.46	2.45	1.68	1.03
Sonora	3.62	2.34	1.54	0.90
Aguascalientes	3.87	2.19	1.34	0.73
Baja California Sur	4.06	2.09	1.22	0.64
Campeche	4.27	1.98	1.10	0.55
Quintana Roo	4.43	1.91	1.03	0.49
Querétaro	4.50	1.88	1.00	0.47
Coahuila	4.62	1.83	0.95	0.43
Nuevo León	5.86	1.45	0.59	0.21
Ciudad de México	7.36	1.15	0.37	0.11

\*: GDP per capita (INEGI). The data is provided by Instituto Mexicano para la Competitividad (IMCO).

**Table 3**  
**Share of Resources Devoted for Redistribution by State under**  
**Decentralization and Tax Revenue Sharing**  
**Case 2: Spillovers**

State	Decentralization $T_D^i/B_D^*$	Revenue Sharing With Social Weight Inverse to Per- Capita Income	Tax Revenue Sharing With Paretian Distribution Teta=1	Tax Revenue Sharing With Paretian Distribution Teta= 2
		$T_C^i/B_C^*$	$T_C^i/B_C^*$	$T_C^i/B_C^*$
Chiapas	1.30	4.73	7.24	10.65
Oaxaca	1.61	4.15	5.33	6.43
Guerrero	1.71	4.02	4.93	5.69
Tlaxcala	1.80	3.94	4.66	5.16
Zacatecas	1.89	3.82	4.38	4.68
Puebla	2.06	3.57	3.86	3.92
Michoacán	2.15	3.51	3.71	3.68
México	2.30	3.21	3.26	3.14
Nayarit	2.30	3.44	3.50	3.35
Tabasco	2.38	3.36	3.35	3.17
Veracruz	2.40	3.26	3.24	3.06
Hidalgo	2.42	3.32	3.30	3.09
Morelos	2.46	3.31	3.25	3.03
Durango	2.74	3.14	2.94	2.65
San Luis Potosí	2.75	3.12	2.92	2.64
Sinaloa	2.86	3.06	2.82	2.53
Guanajuato	2.93	2.99	2.74	2.45
Yucatán	2.94	3.03	2.76	2.46
Chihuahua	3.04	2.96	2.68	2.38
Tamaulipas	3.21	2.89	2.57	2.27
Baja California	3.31	2.85	2.51	2.21
Jalisco	3.39	2.78	2.44	2.16
Colima	3.46	2.83	2.46	2.16
Sonora	3.62	2.75	2.37	2.09
Aguascalientes	3.87	2.69	2.29	2.01
Baja California Sur	4.06	2.65	2.23	1.97
Campeche	4.27	2.59	2.18	1.92
Quintana Roo	4.43	2.56	2.14	1.90
Querétaro	4.50	2.54	2.12	1.88
Coahuila	4.62	2.50	2.09	1.86
Nuevo León	5.86	2.30	1.91	1.76
Ciudad de México	7.36	2.14	1.80	1.71

\*:GDP per capita (INEGI). The data is provided by Instituto Mexicano para la Competitividad (IMCO).

**Table 4**  
**Comparison of the Allocation of Resources Between Decentralization and Tax Revenue Sharing for the Cases With and Without Spillovers**

Share of Overall Resources for Redistribution in District i				
	Decentralization	Tax Revenue Sharing Social Weight Inverse to Income	Tax Revenue Sharing Paretian Distribution Teta=1	Tax Revenue Sharing Paretian Distribution Teta= 2
<b>Case 1. No Spillovers</b>				
Three States with the Lowest Per capita Income	4.63	16.70	26.52	38.03
Three States with the Highest Per Capita Income	17.84	4.43	1.90	0.75
<b>Case 2:</b>				
<b>Spillovers</b>				
Three States with the Lowest Per capita Income	4.63	12.90	17.50	22.77
Three States with the Highest Per Capita Income	17.84	6.95	5.81	5.33

Source: Own elaboration.



## Estimación del VaR mediante un modelo condicional multivariado bajo la hipótesis $\alpha$ -estable sub-Gaussiana

### A conditional approach to VaR with multivariate $\alpha$ -stable sub-Gaussian distributions

Ramona Serrano Bautista\*  
Leovardo Mata Mata\*\*

#### Información del artículo

Recibido:  
29 noviembre 2016

Aceptado:  
21 febrero 2018

**Clasificación JEL:**  
G17; C22; C13; C51

#### Palabras clave:

Distribución  $\alpha$ -estable  
Sub-Gaussiana;  
GARCH multivariado  
estable Sub-Gaussiano;  
Valor en Riesgo

#### Resumen

El objetivo de esta investigación es proponer un modelo de volatilidad multivariable, el cual combina la propiedad de la distribución  $\alpha$ -estable para ajustar colas pesadas con el modelo GARCH para capturar clúster de volatilidad. El supuesto inicial es que los rendimientos siguen una distribución sub-Gaussiana, la cual es un caso particular de las distribuciones estables multivariadas. El modelo GARCH propuesto se aplica en la estimación del VaR a un portafolio compuesto por cinco activos que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). En particular, se compara el desempeño del modelo propuesto con la estimación del VaR obtenida bajo la hipótesis multivariada Gaussiana, t-Student y Cauchy durante el período de la crisis financiera de 2008.

\* Tecnológico de Monterrey, Guadalajara Av. General Ramón Corona 2514  
Nuevo México, 45201 Zapopan, Jal., México. Tel. (33) 36693000. [rsb@itesm.mx](mailto:rsb@itesm.mx)

\*\* Tecnológico de Monterrey, Estado de México. [leovardo.mata@itesm.mx](mailto:leovardo.mata@itesm.mx)



---

**Article information**

Received  
29 November 2016

Accepted  
21 February 2018

---

**JEL Classification:**  
G17; C22; C13; C51

**Keywords:**

$\alpha$ -stable Sub-Gaussian distribution;  
multivariate stable Sub-Gaussian GARCH model; Value at Risk

---

**Abstract**

The purpose of this investigation is to propose a multivariate volatility model that takes into consideration time varying volatility and the property of the  $\alpha$ -stable sub-Gaussian distribution to model heavy tails. The principal assumption is that returns follow a sub-Gaussian distribution, which is a particular multivariate stable distribution. The proposed GARCH model is applied to a Value at Risk (VAR) estimation of a portfolio composed by 5 companies listed in the Mexican Stock Exchange Index (IPC) and compared with the one obtained using the normal multivariate distribution, t-Student and Cauchy. In particular, we examine performances during the financial crisis of 2008.

---

## Introducción

El objetivo de la presente investigación es describir a grandes rasgos la teoría de las distribuciones estables multivariadas, con el objetivo de estimar un modelo GARCH multivariado estable sub-Gaussiano, que posteriormente se aplica en la estimación del VaR de un portafolio.

El creciente interés en el uso de las distribuciones  $\alpha$ -estable o estables ha sido motivado por sus diversas aplicaciones a problemas prácticos, entre ellos, su aplicación en el modelo de portafolios financieros. A partir de los trabajos seminales de Mandelbrot (1963) y Fama (1965), los modelos estables que describen los rendimientos de activos financieros han ido ocupando un lugar prominente tanto en estadística como en la literatura financiera (por ejemplo: Rachev y Han, 2000; Mittnik y Rachev, 1989, Rachev y Mittnik, 2000; Panorska, Mittnik y Rachev, 1995; Mittnik, Rachev y Paoletta, 1997).

Las distribuciones estables son de interés, debido a que el Teorema del Límite Central Generalizado afirma que el único límite no trivial de sumas de variables aleatorias normalizadas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), es estable. Es decir, los vectores aleatorios estables poseen la propiedad que cualquier combinación lineal de sus componentes es  $\alpha$ -estable, lo cual es una característica muy útil en la teoría de portafolios, ya que bajo el supuesto de que los rendimientos de los activos siguen una distribución estable conjunta, entonces el rendimiento de cualquier portafolio de estos activos también sigue una distribución  $\alpha$ -estable.



Por otro lado, en el manejo de riesgos, el principal interés es modelar el caso extremo de las posibles pérdidas. A partir de las investigaciones empíricas, sabemos que una pérdida extrema en un activo, muy a menudo conduce a altas pérdidas en muchos otros activos. Este comportamiento del mercado no puede ser modelado por la distribución normal, pero con ciertas distribuciones elípticas, como por ejemplo, la distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana, podemos capturar este comportamiento.

Sin embargo, y aunque el problema de estimación de los parámetros en el caso univariado ha sido resuelto satisfactoriamente (ver McCulloch, 1986; Nolan, 2001), hasta ahora, la literatura sobre la distribución estable multivariada es escasa.

El principal obstáculo en la implementación de modelos estables es la ausencia de expresiones analíticas explícitas para la función de densidad de probabilidad (excepto las distribuciones de Gauss, Cauchy y Levy). En el caso univariado, es posible utilizar la fórmula de inversión para recuperar la función de densidad de probabilidad (pdf, por sus siglas en inglés). En este contexto, el método basado en la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) ha demostrado tener un buen desempeño en el cálculo de la densidad para un gran número de datos (ver Nolan, 1997; Mittnik, Doganoglu y Chenyao, 1999; Khindanova, Rachev y Schwartz, 2001). Desafortunadamente, en el caso multivariado, el cálculo de la pdf es aún más complicado. La función característica conjunta general implica el cálculo de una integral con respecto a la llamada medida espectral, es decir, una medida de Borel finita sobre la esfera unitaria  $S_d \in \mathbb{R}^d$ , donde  $d$  representa la dimensión del vector estable multivariado.

Hasta hoy, algunos casos específicos dentro del caso general han sido resueltos. Un método para estimar los parámetros de un portafolio estable se describe en Press (1972). Modarres y Nolan (1994) presentan un método para simular vectores aleatorios estables multivariados. Byczkowski, Nolan, y Rajput (1993) y Nolan y Rajput (1997) describen un método para aproximar medidas espectrales estables mediante una medida discreta, además del cálculo numérico de la densidad estable multivariada. Por otro lado, Nolan, Panorska y McCulloch (2001) presentan dos métodos de estimación de las medidas espectrales, uno basado en la función característica empírica y otro en las proyecciones unidimensionales de los datos.

Además, Mittnik y Rachev (1993) sugieren un método para estimar el exponente característico y la medida espectral de una distribución estable bivariada generalizada, empleando solo un pequeño subconjunto de datos extraídos de las colas extremas. McCulloch (2000) presenta un método para estimar la medida espectral de una distribución estable bivariada

generalizada, basada en la serie de estimaciones de los parámetros estable de las proyecciones univariadas de todo el conjunto de datos, obtenidas por máxima verosimilitud. La correspondiente densidad espectral estable es obtenida mediante programación cuadrática.

El primer objetivo de esta investigación es proponer un modelo de volatilidad multivariable, el cual combina la propiedad de la distribución  $\alpha$ -estable para modelar colas pesadas con el modelo GARCH para capturar clúster de volatilidad. El supuesto inicial es que condicionalmente los rendimientos siguen una distribución sub-Gaussiana, la cual es un caso particular de las distribuciones estables multivariadas.

Esta opción permite trabajar con una expresión de la función característica multivariada manejable. A diferencia de Bonato (2012), quien emplea un modelo GARCH multivariado bajo la hipótesis sub-Gaussiana restringido a dos dimensiones, en la presente investigación, el modelo propuesto se aplica a un portafolio compuesto por 5 activos pertenecientes a la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

El segundo objetivo es aplicar el modelo GARCH, propuesto en la estimación del VaR bajo la hipótesis  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana, a un portafolio compuesto por 5 activos que cotizan en la BMV.

Finalmente, dado que no hay evidencia empírica sobre el desempeño de los modelos VaR en la medición de riesgo durante períodos de alta volatilidad en los precios de los activos en el mercado financiero mexicano, se realiza una prueba de desempeño del VaR (backtesting), la cual permite analizar y comparar el desempeño del modelo propuesto con la estimación del VaR obtenida bajo la hipótesis multivariada Gaussiana, t-Student y Cauchy durante el período de la crisis financiera de 2008.

La principal contribución de este trabajo es que proporciona evidencia acerca de que las estimaciones del VaR mediante el modelo GARCH multivariado, bajo la hipótesis  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana, muestran un mejor desempeño durante períodos de turbulencias financieras.

El resto del documento se organiza de la siguiente forma: en la sección 2, se presenta una breve descripción teórica de las distribuciones estables multivariadas. La sección 3 proporciona una descripción de la distribución multivariada  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana y su respectiva estimación. El modelo GARCH multivariado sub-Gaussiano propuesto es descrito en la sección 4. En la sección 5, se presenta el análisis del comportamiento elíptico de los datos, la estimación de la matriz de dispersión, los resultados del modelo GARCH multivariado estable sub-Gaussiano y su respectiva aplicación, en el

cálculo del VaR —por lo que se sabe, por primera vez— a un portafolio compuesto por acciones de la BMVM, y la valuación de su desempeño se describe en la sección 6. El documento finaliza con las conclusiones y sugerencias de posibles líneas de investigación.

## 1. Distribuciones estables multivariadas

**Definición.** Un vector aleatorio  $d$ -dimensional  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  es estable si, para todo  $n \geq 2$ , existe una constante  $A_n$  y un vector  $\mathbf{B}_n$ , tal que:

$$\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)} + \dots + \mathbf{X}^{(n)} \stackrel{d}{=} A_n \mathbf{X} + \mathbf{B}_n,$$

donde  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  son copias i.i.d. de  $\mathbf{X}$ . La constante debe ser de la forma  $A_n = n^{1/\alpha}$ , donde  $0 < \alpha \leq 2$  es el índice de estabilidad.

Algunas veces es utilizado el término conjuntamente estable para subrayar el hecho de que todas las componentes  $X_j$  del vector estable  $\mathbf{X}$  deben ser  $\alpha$ -estable univariadas<sup>1</sup>, bajo un mismo índice de estabilidad  $\alpha$ . Esto se deduce del siguiente teorema, y justifica el uso del término vector aleatorio  $\alpha$ -estable.

**Teorema.** i) Sea  $\mathbf{X}$  un vector aleatorio estable. Entonces toda proyección unidimensional  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{X} = \sum u_i X_i$  es una variable aleatoria estable unidimensional, con el mismo índice  $\alpha$  para todo  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d$ .

ii) Inversamente, supongamos que  $\mathbf{X}$  es un vector aleatorio con la propiedad de que toda proyección unidimensional  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}$  es estable, lo cual se denota como  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{X} \sim S(\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{u}), \delta(\mathbf{u}))$ . Entonces, existe un único  $\alpha$ , el cual es el índice de estabilidad de todas las proyecciones, es decir,  $\alpha(\mathbf{u}) = \alpha$  es constante. Si  $\alpha \geq 1$ , entonces  $\mathbf{X}$  es estable. Si  $\alpha < 1$ , y la función  $\delta(\mathbf{u})$  y el vector de parámetros de localización  $\mathbf{u}$

---

<sup>1</sup> Una distribución  $\alpha$ -estable univariada es descrita por cuatro parámetros:  $0 < \alpha \leq 2$  es el índice de estabilidad o exponente característico que refleja el tamaño de las colas de la distribución,  $-1 \leq \beta \leq 1$  es el parámetro de asimetría que indica la simetría de la distribución,  $\gamma \geq 0$  es un parámetro de escala también denominado dispersión, y  $\delta \in \mathbf{R}$  es el parámetro de posición.

posición  $\delta = (\delta_1, K, \delta_d)$  de los componentes  $X_1, \dots, X_d$  (todos en la 1-parametrización) están relacionados por:

$$\delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \delta \quad (1)$$

entonces,  $\mathbf{X}$  es estable.

La demostración de la primera parte de este teorema es la demostración del Teorema 2.1.2 de Samorodnitsky y Taqqu (1994), la segunda es la demostración del Teorema 2.1.5 (c) de Samorodnitsky y Taqqu (1994) cuando  $\alpha \geq 1$ , la demostración del caso  $\alpha < 1$  se encuentra en Nolan (1999).

Una ventaja del teorema anterior es que proporciona una forma de parametrizar las distribuciones estables multivariadas en términos de proyecciones unidimensionales. Es decir, conociendo la función característica de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}$  para todo  $\mathbf{u}$ , es posible conocer la función característica de  $\mathbf{X}$ . Por lo cual,  $\alpha$  y las funciones  $\beta(\cdot), \gamma(\cdot), \delta(\cdot)$  caracterizan completamente la distribución conjunta. De hecho, conociendo estas funciones sobre la esfera unitaria  $S_d = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d : |\mathbf{u}| = 1\}$ , es posible caracterizar la distribución.

Otra ventaja del teorema, es que proporciona una forma de evaluar si un conjunto de datos multivariados es estable, examinando solo las proyecciones unidimensionales de los datos. Se realizan proyecciones en múltiples direcciones, y se observa si estas son bien descritas por distribuciones estables univariadas. Si es así, y el índice de estabilidad es el mismo para todas las direcciones (si  $\alpha < 1$ , el parámetro de posición, satisface (1)), entonces un modelo estable multivariado es apropiado.

### 1.1. Medida espectral

Una alternativa para describir vectores aleatorios  $\alpha$ -estable es su medida espectral  $\Lambda$  (una medida de Borel finita sobre la esfera unitaria en  $\mathbf{R}^d : S_d = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d : |\mathbf{u}| = 1\}$ ) y un vector de localización  $\delta = (\delta_1, K, \delta_d) \in \mathbf{R}^d$ .

La demostración del siguiente resultado, el cual se le atribuye a Feldheim (1937), aparece en la sección 2.3 de Samorodnitsky y Taqqu (1994), en él se

escriben las funciones  $\beta(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$  y  $\delta(\cdot)$ , en términos de la medida espectral.

**Teorema.** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  un vector aleatorio conjuntamente estable, tal que:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{X} \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta(\mathbf{u}), \gamma(\mathbf{u}), \delta(\mathbf{u}); k), \quad k = 0, 1$$

para todo  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^d$ . Entonces, existe una medida finita  $\Gamma$  sobre  $S_d$  y un vector de localización  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbf{R}^d$ , en términos de los cuales es posible reescribir los parámetros de escala  $\gamma(\mathbf{t})$ , de asimetría  $\beta(\mathbf{t})$  y de posición  $\delta(\mathbf{t})$  cuando  $d > 1$

$$\gamma^\alpha(\mathbf{u}) = \int_{S_d} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(ds),$$

$$\beta(\mathbf{u}) = \gamma^{-\alpha}(\mathbf{u}) \int_{S_d} \text{sign} \langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle |\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(ds)$$

$$\delta(\mathbf{u}) = \begin{cases} \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \rangle, & \alpha \neq 1 \\ \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \rangle - \frac{2}{\pi} \int_{S_d} \langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle \ln |\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle| \Gamma(ds), & \alpha = 1 \end{cases}$$

Para todo  $u \in \mathbf{R}^d$ , la proyección  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{X} \rangle$  es una variable aleatoria estable uno dimensional.

## 2. Distribuciones multivariadas $\alpha$ -estable Sub-Gaussianas o Elípticas

Desafortunadamente, ajustar distribuciones  $\alpha$ -estable multivariadas a los datos en el caso de dimensiones mayores a 2 aún no es factible, dado que la medida espectral de la función característica es extremadamente difícil de estimar (ver Cheng y Rachev, 1995; Nolan, Panorska y McCulloch, 2001); pero algunos casos especiales son computacionalmente accesibles.

En esta investigación, son tomadas en cuenta las distribuciones multivariadas  $\alpha$ -estable sub-Gaussianas o Elípticas, las cuales son una subclase del caso general, por lo cual satisfacen el Teorema del Límite Central generalizado, lo cual las hace atractivas en la teoría financiera.

### 2.1. Vectores aleatorios $\alpha$ -estable sub-Gaussianos

Si  $\mathbf{X}$  es un vector  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano o simplemente elíptico, entonces tiene la función característica

$$E \exp(i\langle \mathbf{X}, \mathbf{u} \rangle) = \exp\left(-\left(\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}\right)^{\alpha/2} + i\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \rangle\right) \quad (2)$$

y parámetros de proyección:

$$\gamma(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}\right)^{1/2}, \quad \beta(\mathbf{u}) = 0, \quad \delta(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \rangle,$$

donde  $\Sigma$  es una matriz definida positiva y  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbf{R}^d$  es el vector de localización. En este caso, la medida espectral es complicada (Proposición 2.5.8 de Samorodnitsky y Taqqu, 1994).

Sea  $\mathbf{G} \sim N(0, \Sigma)$  un vector aleatorio multivariado normal  $d$ -dimensional con media nula y matriz de varianza-covarianza  $\Sigma$  independiente de  $A$ , una variable aleatoria  $\alpha/2$ -estable totalmente sesgada a la derecha  $A \sim S(\alpha/2, 1, \gamma, 0)$  con  $0 < \alpha < 2$ . Entonces,

$$\mathbf{X} = A^{1/2} \mathbf{G} = (A^{1/2} G_1, \dots, A^{1/2} G_d)$$

es un vector multivariado  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano con función característica conjunta

$$E \exp(i\langle \mathbf{X}, \mathbf{u} \rangle) = \exp\left(-\left(\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}\right)^{\alpha/2}\right).$$

En particular, si  $0 < \alpha < 2$ ,  $A \sim S(\alpha/2, 1, 2\gamma_0^2(\cos \pi\alpha/4)^{2/\alpha}, 0)$  y  $\mathbf{G} \sim N(0, \Sigma)$ , entonces

$\mathbf{X} = A^{1/2} \mathbf{G} + \boldsymbol{\delta}$  tiene función característica (2).

El vector multivariado  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano  $\mathbf{X}$  hereda su estructura de dependencia del vector subyacente aleatorio multivariado normal  $\mathbf{G}$ , la cual es descrita por la matriz de varianza-covarianza  $\Sigma$ , también llamada matriz de dispersión.

## 2.2. Estimación de la distribución $\alpha$ -estable sub-Gaussiana multivariada

Como se mencionó anteriormente, la estimación de los parámetros de la distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana es posible. Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  un vector multivariado  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano, se propone el siguiente algoritmo para estimar los parámetros que lo describen:

- 1) Para cada una de las componentes  $X_i$  del vector  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano  $\mathbf{X}$ , estimar el vector de parámetros  $\hat{\theta}_i = (\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i)$ ,

$i = 1, \dots, d$ .

- 2) Estimar el índice de estabilidad de la distribución multivariada de la siguiente forma:

$$\hat{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^d \hat{\alpha}_i \right) / d \quad (3)$$

- 3) Centrar la distribución substrayéndole a  $\mathbf{X}$  el parámetro de posición estimado  $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_d)$ .
- 4) Estimar la matriz de dispersión  $\Sigma = \sigma_{i,j}$ .

### 2.2.1. Estimación de la matriz de dispersión

En el caso multivariado, es de suma importancia modelar la estructura de dependencia entre los activos que conforman el portafolio, desafortunadamente, la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos no está definida en el caso de las distribuciones estables cuando  $\alpha < 2$ . En cambio, bajo la hipótesis sub-gaussiana, el parámetro de escala del vector multivariado  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  se puede escribir como una combinación lineal de la matriz de covarianza de los vectores gaussianos subyacentes, lo cual nos permite estimar la matriz de dispersión  $\Sigma = \sigma_{i,j}$ .

En esta investigación, se estima la matriz de dispersión siguiendo el método de la proyección propuesto por Nolan (2013), en el que los parámetros de la distribución estable multivariada son funciones explícitas de los parámetros de cada una de las series univariadas, los cuales son estimados vía máxima verosimilitud. A continuación, se hace una breve descripción de este método:

Dado  $\mathbf{X}$ , un vector aleatorio  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano  $d$ -dimensional, se tiene que para cualquier vector  $\mathbf{u}$ , la proyección  $\mathbf{u}^T \mathbf{X}$  es  $\alpha$ -estable univariada con parámetro de escala  $\gamma(u) = (\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u})^{1/2}$ . Por lo cual,

$$\gamma^2(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} = \sum_i u_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{i < j} u_i u_j \sigma_{ij}$$

En particular, los elementos de la diagonal  $\sigma_{ii}$  de la matriz de dispersión son el cuadrado del parámetro de escala del  $i$ -ésimo componente de  $\mathbf{X}$ ; es decir,  $\sigma_{ii} = \gamma_i^2(\mathbf{e}_i)$ , donde  $\mathbf{e}_i$  representa la base canónica; y

$\sigma_{ij} = (\gamma_i^2(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - \sigma_{ii} - \sigma_{jj})/2$ , donde  $\gamma_i(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)$  es el parámetro de escala de la proyección  $(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)^T \mathbf{X} = (1,1)^T (X_i, X_j) = X_i + X_j$ .

Esto implica estimar  $d(d+1)/2$  parámetros de escala unidimensionales.

Dado que el vector multivariado  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano  $\mathbf{X}$  hereda su estructura de dependencia del vector subyacente aleatorio multivariado normal  $\mathbf{G}$ , Kring, Rachev, Markus y Fabozzi (2009) señalan que es posible interpretar  $\sigma_{ii}$  como la cuasi-varianza del componente  $X_i$ , y  $\sigma_{ij}$  como la cuasi-varianza entre los componentes  $X_i$  y  $X_j$ .

### 3. Modelo GARCH multivariado elíptico o sub-Gaussiano estable

La extensión del caso multivariado de los modelos Autorregresivo con Heterocedasticidad Condicional (ARCH), introducido por Engle (1982), y el modelo ARCH generalizado o GARCH, propuesto por Bollerslev (1986) para describir la heteroscedasticidad de las variables financieras, ha sido prolífico. Sin embargo, la mayoría de estos modelos descansan en el supuesto de que los datos siguen una distribución normal multivariada o t-student, por lo cual es posible describir la estructura de dependencia de los activos mediante la matriz de varianza-covarianza.

La aplicación de las distribuciones estables en los modelos GARCH es relativamente nueva. Panorska, Mittnik y Rachev (1995); Mittnik, Paoella y Rachev (2002); Curto, Pinto y Tavares (2009); Bonato (2012), Naka y Oral (2013); y Mohammadi (2017) emplean modelos GARCH con distribuciones estables para examinar la volatilidad de los rendimientos financieros. En esta investigación, se propone un modelo GARCH multivariado elíptico o sub-Gaussiano, donde la estructura de dependencia de los activos es descrita mediante la matriz de dispersión, lo cual nos permite reducir los cálculos numéricos. El modelo se describe a continuación.

Definamos  $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$  como el vector de las innovaciones de los rendimientos. Supongamos que  $\varepsilon_t$  es un vector  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano, es decir  $\varepsilon_t = A^{1/2} \mathbf{G}$ , donde  $A \sim S(\alpha/2, 1, \gamma, 0)$  es una variable aleatoria  $\alpha/2$ -estable, totalmente sesgada a la derecha con  $0 < \alpha < 2$  y  $\mathbf{G} \sim N(0, \Sigma)$ , un vector aleatorio multivariado normal  $d$ -dimensional con media nula y matriz de varianza-covarianza  $\Sigma$  independiente de  $A$ .



Por lo cual, el vector de rendimientos del portafolio  $R_t = \sum_{i=1}^d \omega_i r_{i,t}$ , donde  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$  representa los pesos del portafolio, es un vector  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano con parámetros de proyección  $\gamma(\omega) = (\omega^T \Sigma \omega)^{1/2}$ ,  $\beta(\omega) = 0$ ,  $\delta(\omega) = \langle \omega, \delta \rangle$ . Lo cual, es consecuencia directa del Teorema del Límite Central Generalizado.

El índice de estabilidad del portafolio  $\alpha$  no se estimará directamente de la distribución de los rendimientos del mismo, pues hacerlo de esta forma no sería adecuado, dado que no se consideraría la estructura de dependencia y la heterocedasticidad condicional de los rendimientos. Por lo tanto, para considerar estas dos características previamente mencionadas, se propone introducir un modelo GARCH multivariante y estimar  $\alpha$  de la distribución de los rendimientos condicionales.

Siguiendo a Bonato (2012), optamos por el modelo GARCH multivariante con correlaciones condicionales dinámicas (DCC), propuesto por Engle (2002), debido a que su estimación es computacionalmente accesible y además es un modelo flexible que permite especificaciones distintas en los GARCH univariados, utilizados para calcular la matriz diagonal  $D_t$ . En esta investigación, la estimación de los GARCH univariados se realiza según el método descrito en Serrano y Mata (2018).

Engle (2002) define el modelo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \Sigma_t^{1/2} z_t \\ \Sigma_t &= D_t R_t D_t \\ D_t &= \text{diag}(\sigma_{i,t}) \\ R_t &= \text{diag}(Q_t^{-1}) Q_t \text{diag}(Q_t^{-1}) \end{aligned}$$

donde  $\mu_t$  es el vector de medias condicionales,  $R_t$  es la matriz de correlaciones condicionales,  $\sigma_{i,t}$  es la desviación estándar condicional de los GARCH univariados y  $Q_t (d \times d)$  es una matriz definida positiva  $Q_t = (1-a-b)R + a u_{t-1} u_{t-1}^T + b Q_{t-1}$ , donde  $u_t$  son los residuos estandarizados obtenidos de los GARCH univariados,  $R$  es la matriz de covarianzas no condicionales de los residuos  $u_t$ , y  $a$  y  $b$  son constantes positivas; el proceso presenta reversión a la media, siempre y cuando

$$a+b < 1.$$

En el modelo propuesto por Engle (2002), la hipótesis es que  $r_t$  sigue una distribución gaussiana con matriz de covarianza  $\Sigma_t$ , sin embargo, nuestra hipótesis es que los rendimientos siguen una distribución sub-Gaussiana estable, por lo cual en nuestro modelo propuesto,  $\Sigma_t$  es reemplazada por la matriz de dispersión.

Como se mencionó previamente, la estimación de la matriz diagonal  $D_t$  se efectúa empleando los modelos GARCH estable univariados, es decir  $\sigma_{i,t}$  es el parámetro de escala condicional del  $i$ -ésimo componente de  $\mathbf{X}$  y los elementos de la matriz  $R$  se estiman usando el método de la proyección propuesto por Nolan (2013).

De acuerdo con los trabajos de Mittnik, Paoletta y Rachev (2002), y más recientemente Mohammadi (2017), lo anterior nos permite asegurar que nuestro modelo GARCH multivariado satisface las condiciones de estacionariedad.

Además, para estimar la matriz de dispersión empleamos el modelo propuesto por Nolan (2013), que se describe en la sección anterior, lo cual nos permite reducir los cálculos numéricos y por ende aumentar la rapidez de ejecución del algoritmo computacional. Esto nos da una ventaja sobre el modelo GARCH estable, propuesto por Bonato (2012), donde los cálculos numéricos son intensos, por lo cual su modelo solo se aplica a un portafolio bivariado; a diferencia de este, nuestro modelo es aplicado a un portafolio compuesto por 5 activos financieros.

#### **4. Aplicación a la estimación del VaR de un portafolio compuesto por activos financieros que cotizan en la BMV**

##### **4.1. Descripción de los datos**

Un portafolio es una combinación lineal de activos financieros (acciones, commodities, etc.). Considere un inversor que tiene una cantidad fija de dinero para invertir en  $d$  activos:  $\omega_1$  en el activo 1,  $\omega_2$  en el activo 2, ...,  $\omega_d$  en el activo  $d$ . Las tasas de rendimiento,  $X_1, X_2, \dots, X_d$  son aleatorias. Al concluir el período de inversión, el portafolio compuesto por estos activos tiene un rendimiento

$$R = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \dots + \omega_d X_d$$

La distribución de  $R$  depende de la distribución del vector de rendimientos  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ .

Este trabajo propone el uso de distribuciones estables multivariadas, en particular el caso sub-Gaussiano, para estimar el VaR de un portafolio equiponderado; es decir, se asume que los componentes del portafolio siguen una distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana. Algunos trabajos pioneros en esta área son Press (1972) y Cheng y Rachev (1995).

Para el análisis empírico, se han elegido 5 cinco activos con diferente volumen de operación que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), pertenecientes a 5 diferentes industrias. Estos activos corresponden a las siguientes empresas: Consorcio ARA, S.A. de C.V. (ARA), líder en venta y construcción de inmuebles residenciales y que también opera como contratista para clientes no afiliados en la construcción, promoción y comercialización de proyectos comerciales e industriales; Controladora Comercial Mexicana (COMER), compañía controladora que opera en el sector detallista en México y cuenta con 199 tiendas y también con una cadena de 74 restaurantes familiares; Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V. (FEMSA), empresa que participa en la industria de refrescos, a través de Coca-Cola FEMSA, el embotellador independiente más grande de productos Coca-Cola en el mundo y también dispone de otras operaciones, como logística y equipo de refrigeración; Grupo Carso (GCARSO), uno de los conglomerados más importantes de América Latina que controla y opera empresas del sector industrial, comercial e infraestructura y construcción y Grupo Televisa, S.A.B. (TELEVISA), líder en la producción y transmisión de contenido de entretenimiento televisivo en México, involucrada en la producción de señales de televisión restringida, en servicios de televisión directa al hogar vía satélite, y en servicios de televisión por cable y telecomunicaciones. Se encarga también de la publicación y distribución de revistas, producción y transmisión de programas de radio, operación de un portal de Internet y en la industria de juegos y sorteos.

La moneda de referencia a utilizar en nuestro modelo es el peso mexicano, ya que es la moneda de cotización de las empresas. Las cinco series que conforman el portafolio de la aplicación, contienen información de los precios diarios de cierre de cada activo, excluyendo fines de semana y festivos.

La muestra total inicia el 2 de enero de 2003 y finaliza el 31 de diciembre de 2009, por lo cual se tienen 1767 observaciones, para cada uno de los activos. Esto con la finalidad de evaluar el desempeño de la estimación del modelo VaR  $\alpha$ -estable durante períodos de alta volatilidad, como la crisis financiera de 2008. Además, para cada serie, se consideran los rendimientos logarítmicos diarios.

## 4.2. Análisis del comportamiento elíptico de los datos y estimación del índice de estabilidad

Primero determinemos si el portafolio puede ser descrito por una distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana. Esto es de fundamental importancia, dado que cualquier portafolio bajo la hipótesis sub-Gaussiana es descrito por una distribución estable cuyo parámetro de escala es una combinación lineal de los elementos de la matriz de dispersión  $\Sigma = \sigma_{i,j}$ .

Lo anterior será analizado empleando el método propuesto por Nolan (2013), el cual se describe a continuación:

- 1) Estimar el vector de parámetros  $\hat{\theta}_i = (\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i, \hat{\delta}_i)$ , para cada acción  $X_i, i = 1, \dots, d$ .
- 2) Verificar que los índices de estabilidad estimados univariados  $\hat{\alpha}_i$  no sean significativamente diferentes, dado que si esto ocurre, entonces los datos no son  $\alpha$ -estable, conjuntamente, por lo cual no pueden ser modelados por una distribución sub-Gaussiana.
- 3) Verificar que los parámetros de asimetría estimados  $\hat{\beta}_i$  sean cercanos a cero, de lo contrario la distribución es no simétrica, por lo cual no podría ser sub-Gaussiana.
- 4) Utilizar gráficas de dispersión a pares para visualizar el comportamiento elíptico de los datos.
- 5) Si los datos cumplen los criterios 2-4, entonces el uso de un modelo sub-Gaussiano está justificado. En caso contrario, la hipótesis sub-Gaussiana se rechaza.

En este estudio, primero se filtraron los rendimientos logarítmicos empleando el modelo GARCH(1,1) multivariado sub-Gaussiano descrito anteriormente. Con lo cual se introdujo la heterocedasticidad de los rendimientos en el modelo multivariado. Posteriormente, se ajustaron los residuos condicionales al modelo sub-Gaussiano.

El modelo se describe a continuación:

$$\begin{aligned}
 R_{i,t} &= \mu_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = 1, \dots, 5 \\
 \varepsilon_{i,t} &= \sigma_{i,t} z_{i,t} \\
 \sigma_{i,t}^2 &= a_{i,0} + a_{i,1} \varepsilon_{i,t-1}^2 + b_{i,1} \sigma_{i,t-1}^2 \\
 \sigma_{ij,t}^2 &= a_{i,j} \sqrt{\sigma_{i,t-1}^2 \sigma_{j,t-1}^2}
 \end{aligned} \tag{4}$$

En la tabla 1, se presentan la estimaciones del modelo GARCH(1,1) obtenidas por máxima verosimilitud.

**Tabla 1**  
**Parámetros GARCH(1,1)**

	Coeficiente	Error Estándar
a1,0	1.33E-05	2.32E-06
a1,1	0.075442	0.008208
b1,1	0.901551	0.010157
a2,0	5.25E-05	3.79E-06
a2,1	0.271988	0.019281
b2,1	0.661237	0.01651
a3,0	6.44E-06	1.11E-06
a3,1	0.057992	0.006801
b3,1	0.921818	0.007951
a4,0	1.05E-05	1.45E-06
a4,1	0.096457	0.008634
b4,1	0.882154	0.009303
a5,0	4.46E-06	1.05E-06
a5,1	0.027889	0.0035
b5,1	0.956723	0.006194
a1,2	0.326957	0.016374
a1,3	0.285542	0.019708
a1,4	0.33223	0.019936
a1,5	0.378393	0.018723
a2,3	0.288504	0.020656
a2,4	0.321715	0.019525
a2,5	0.321014	0.021931
a3,4	0.294448	0.019991
a3,5	0.449027	0.017903
a4,5	0.360646	0.02082

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg.

En la tabla 2, se presentan los parámetros estimados de la distribución  $\alpha$ -estable para cada uno de los componentes del portafolio, los cuales son estimados por máxima verosimilitud mediante el programa STABLE, descrito en Nolan (1997).

**Tabla 2**  
**Parámetros de la distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana.**

Series	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
ARA	<b>1.60981544</b> (1.03792098) [1.55]	<b>-0.00000001</b> (-0.000000003) [1.52]	<b>0.01203195</b> (0.00625361) [1.92]	<b>-0.00065309</b> (-0.00037213) [1.76]
COMER	<b>1.57662669</b> (0.85732827) [1.84]	<b>0.12080045</b> (0.073035337) [1.65]	<b>0.01221827</b> (0.00711606) [1.72]	<b>-0.00111243</b> (-0.00071401) [1.56]
FEMSA	<b>1.61899336</b> (0.84986528) [1.91]	<b>0.09202455</b> (0.053784072) [1.71]	<b>0.01002487</b> (0.00508877) [1.97]	<b>-0.00061161</b> (-0.00034889) [1.75]
GCARSO	<b>1.53388814</b> (0.97143011) [1.58]	<b>0.00000000</b> (0.000000002) [1.68]	<b>0.01121064</b> (0.00590656) [1.93]	<b>-0.00063818</b> (-0.00039986) [1.62]
TELEVISA	<b>1.73406170</b> (1.06123727) [1.63]	<b>0.09254939</b> (0.059517296) [1.56]	<b>0.01081221</b> (0.00643584) [1.68]	<b>-0.00088694</b> (-0.00045461) [1.95]

Nota. Entre paréntesis se tiene el error estándar y entre corchetes el estadístico t. Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 2, se observa que los índices de estabilidad  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , son significativamente inferiores a 2, lo cual indica que los datos son leptocúrticos. Además, los índices de asimetría  $\beta_i$  son cercanos a cero, excepto para la serie COMER y FEMSA, que resultan estadísticamente diferentes de cero según la metodología de Barndorff-Nielsen, Mikosch y Resnick (2012), ver apéndice A. Sin embargo, siguiendo la justificación presentada en Nolan (2013), página 2078, se justifica el uso de la distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana.

Adicionalmente, se estiman los parámetros para las distribuciones multivariadas t-Student y Cauchy, con fines de comparación. Los resultados

se encuentran en el apéndice B, donde cada estimador se acompaña de su error estándar y su estadístico de prueba  $t$ .

En las figuras 1 a 5, se muestran las gráficas de dispersión a pares de las acciones que componen el portafolio y se visualiza el comportamiento elíptico de los datos.

Dado que los datos cumplen los criterios 2-4, se concluye que estos siguen una distribución sub-Gaussiano multivariada. Por lo tanto, se procede a estimar el índice de estabilidad de la distribución multivariada usando (3)  $\hat{\alpha} = 1.61468$ .

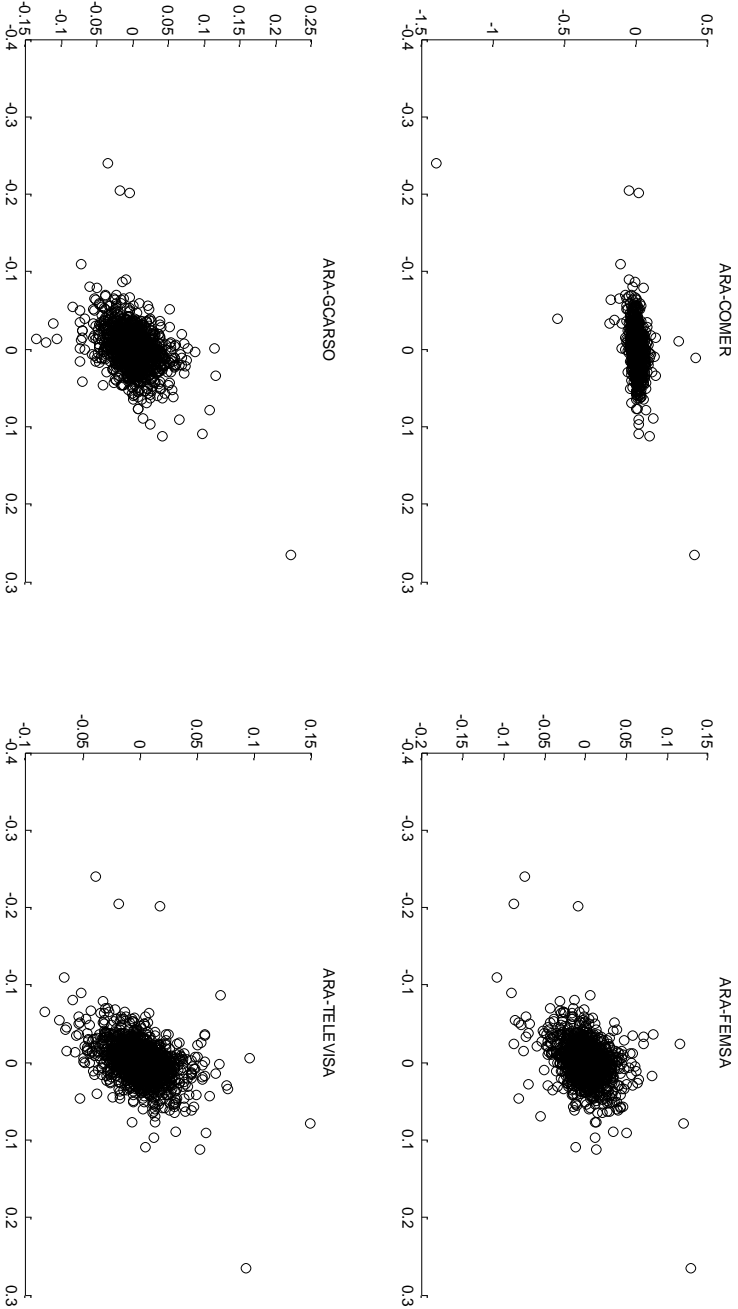
### 4.3. Estimación de matriz de dispersión

En esta sección, se muestra la matriz de dispersión estimada de la distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana. Para estimarla se empleó el modelo descrito en la sección 2.2.1.

Antes de aplicar este modelo, se centra cada serie  $X_i$ , substrayéndole el parámetro de posición estimado  $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_d)$ . La matriz de dispersión estimada se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} 0.000145 & 7.52e-05 & 4.44e-05 & 6.40e-05 & 6.17e-05 \\ 7.52e-05 & 0.000149 & 5.48e-05 & 5.81e-05 & 6.19e-05 \\ 4.44e-05 & 5.48e-05 & 0.0001 & 5.38e-05 & 5.49e-05 \\ 6.40e-05 & 5.81e-05 & 5.38e-05 & 0.000126 & 6.46e-05 \\ 6.17e-05 & 6.19e-05 & 5.49e-05 & 6.46e-05 & 0.000117 \end{bmatrix}$$

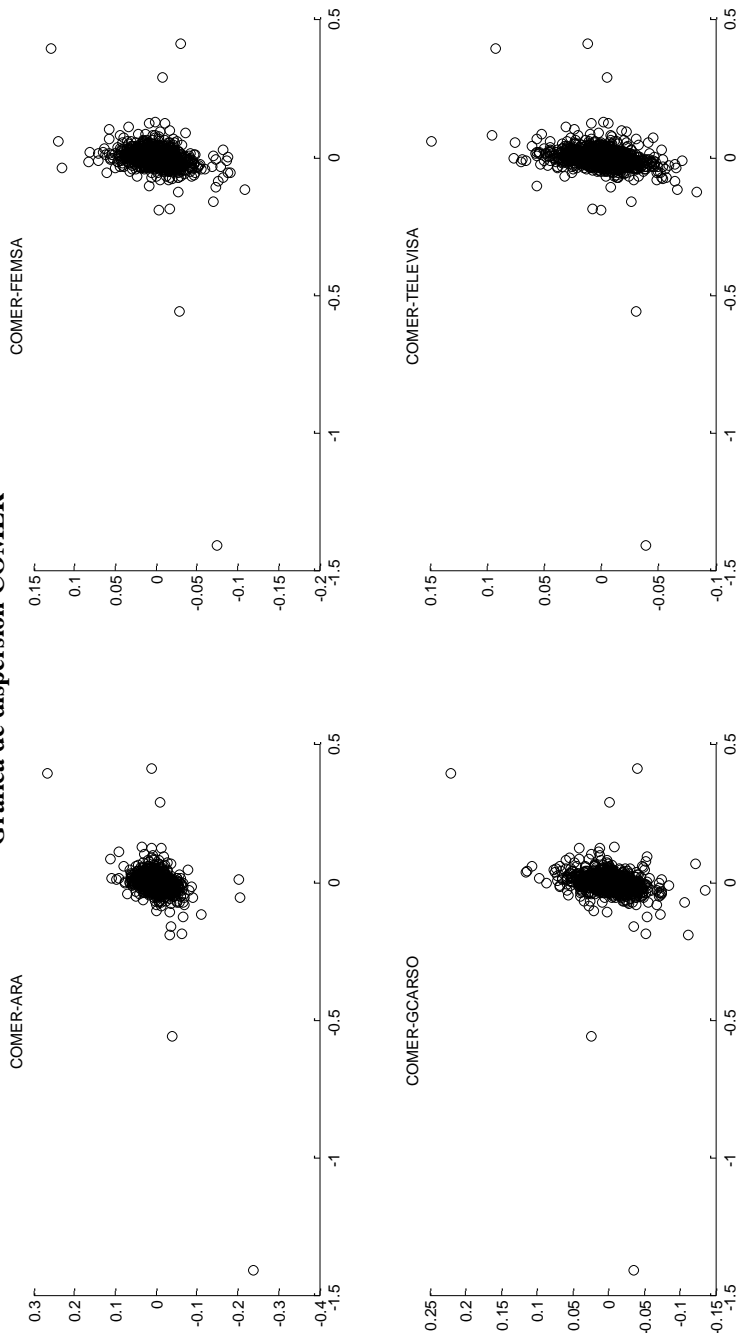
Figura 1  
Gráfica de dispersión ARA



Fuente: Elaboración propia.

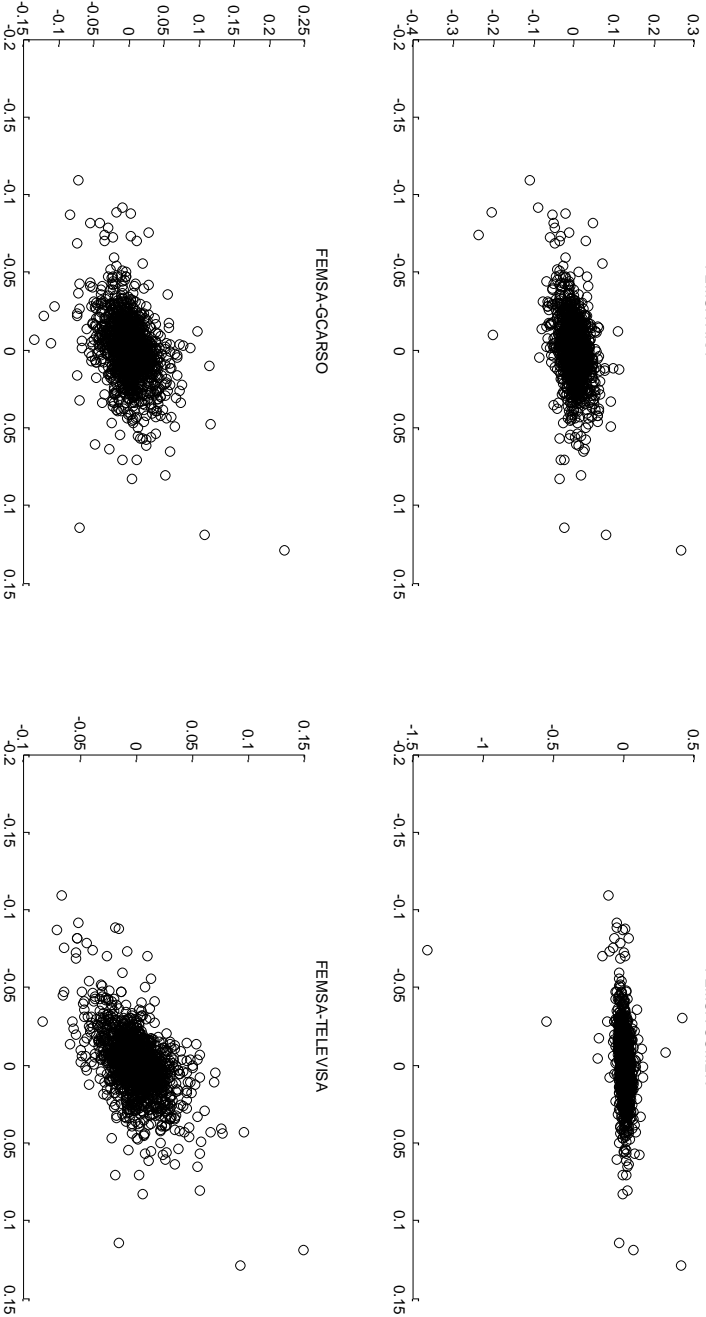


**Figura 2**  
**Gráfica de dispersión COMER**



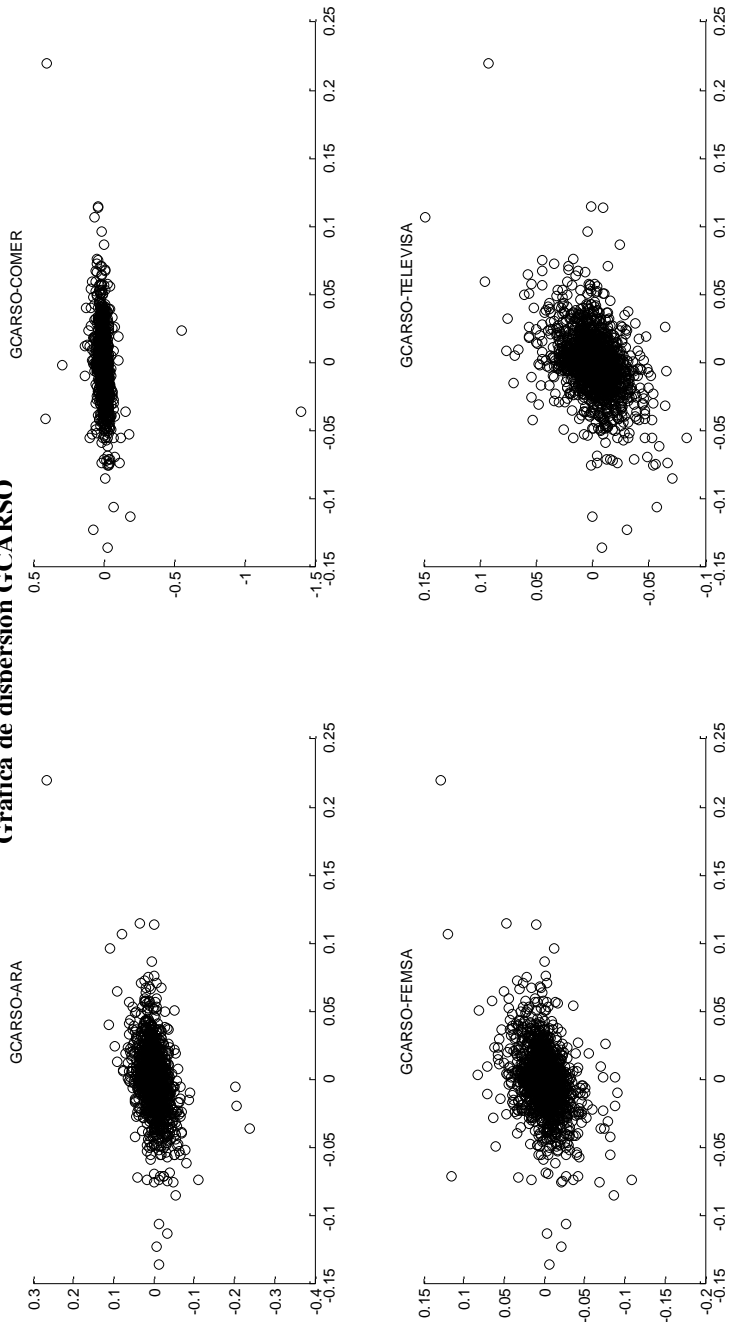
Fuente: Elaboración propia.

Figura 3  
Gráfica de dispersión FEMSA



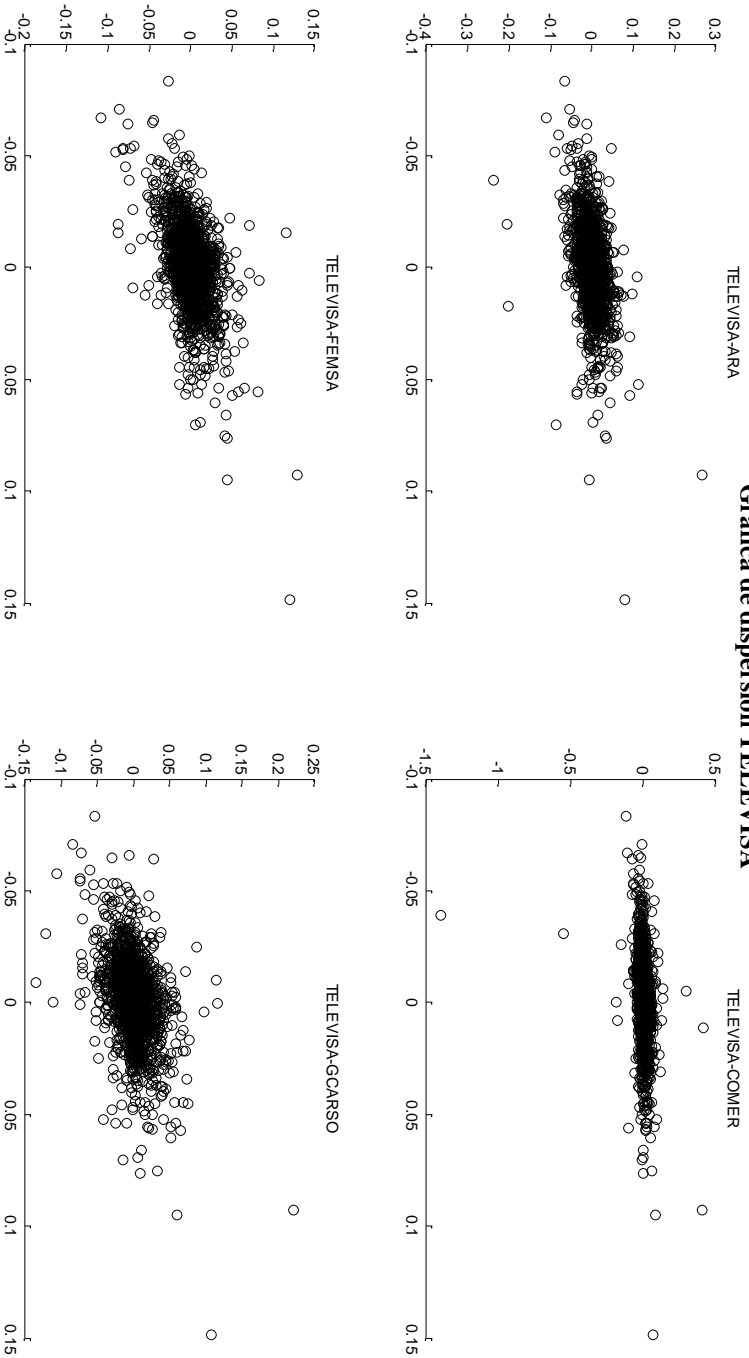
Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4**  
**Gráfica de dispersión GCARSO**



Fuente: Elaboración propia.

**Figura**  
**Gráfica de dispersión TELEVISIA**



Fuente: Elaboración propia.

#### 4.4. Estimaciones del VaR

En esta sección, se estima el VaR del portafolio mediante simulación Montecarlo, empleando el modelo GARCH multivariado sub-Gaussiano propuesto bajo la hipótesis de que: condicionalmente, los rendimientos siguen una distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana.

El VaR se calcula considerando el horizonte de tiempo de un día ( $\tau = 1$ ), y un nivel de confianza  $1 - q$ , para lo cual se sigue el siguiente algoritmo:

- 1) Estimar los parámetros del modelo GARCH multivariado sub-Gaussiano, empleando el método de máxima verosimilitud y obtener los residuos condicionales.
- 2) Dados los residuos condicionales obtenidos en el paso anterior, estimar el índice de estabilidad  $\hat{\alpha}$  de la distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana.
- 3) Estimar la matriz de dispersión  $\Sigma = \sigma_{i,j}$ .
- 4) Realizar  $S$  simulaciones de vectores aleatorios  $\alpha$ -estable sub-Gaussianos  $\hat{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, S$ .
- 5) Aplicar descomposición de Cholesky a  $\Sigma = AA^T$ .
- 6) Generar los posibles escenarios  $P_{t+1} = P_0 e^{A\hat{z}_j}$ .
- 7) Estimar los posibles rendimientos  $\hat{r}_{t+1,j}$ ,  $j = 1, \dots, S$ .
- 8) Estimar el VaR como el negativo del  $q$ -ésimo cuartil de la distribución de probabilidad simulada.

En la presente investigación, el VaR se estima a un nivel de confianza de 95%, 99% y 99.5%. En la tabla 3, se muestran los VaR estimados.

En las estimaciones del VaR, se observa que el modelo  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano proporciona valores mayores a las estimaciones basadas en la distribución normal, t-Student y Cauchy, es decir, el modelo del VaR  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano proporciona estimaciones de las pérdidas potenciales más conservadoras, lo cual es preferido por las instituciones financieras. Es importante señalar que este resultado corresponde al periodo 2008-2009.

**Tabla 3**  
**Estimaciones del VaR**

Nivel de Confianza	Distribución	VaR
99.5%	Normal	-6.176
99.5%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	-16.624
99.5%	t-Student	-10.646
99.5%	Cauchy	-9.623
99.0%	Normal	-5.776
99.0%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	-12.191
99.5%	t-Student	-9.176
99.5%	Cauchy	-7.896
95.0%	Normal	-3.873
95.0%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	-5.824
99.5%	t-Student	-4.875
99.5%	Cauchy	-4.367

Fuente: Elaboración propia.

## 5. Evaluación del desempeño del VaR

### 5.1. Backtesting

En esta sección, se emplea la prueba llamada backtesting, para evaluar el desempeño del modelo VaR bajo el supuesto de que condicionalmente los rendimientos siguen una distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana, t-Student, Cauchy y normal, respectivamente.

Sea  $1 - q$  el nivel de confianza para el cálculo del VaR y  $k$ , el número de observaciones históricas más recientes empleadas para pronosticar el VaR actual. En este trabajo,  $k=502$ , es decir, utilizamos los datos históricos de los últimos dos años de la respectiva muestra para predecir el VaR.

El rango para el cual el número de veces  $N_{1-q}$  que se ha excedido el VaR es aceptable y sus respectivas frecuencias  $\frac{N_{1-q}}{k}$ , a un nivel significativo del 1%, se muestran en la tabla 4.

**Tabla 4**  
**Rango y frecuencia de violaciones del VaR aceptables.**

VaR	Rango de violaciones del VaR aceptable	Frecuencia de violaciones del VaR aceptable
99.5%	[0,7]	[0.00%,1.31%]
99.0%	[0,11]	[0.00%,2.14%]
95.0%	[13,38]	[2.49%,7.51%]

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados del backtesting se muestran en la tabla 5. En esta tabla, se puede observar que durante el período de la crisis financiera de 2008, el número de violaciones del VaR bajo el supuesto de normalidad<sup>2</sup> se encuentra muy por encima del intervalo admisible, lo que implica que el VaR, bajo este supuesto, subestima significativamente las pérdidas potenciales durante períodos de crisis.

Además, se observa que el número de violaciones del VaR, obtenida bajo la hipótesis multivariada t-Student y Cauchy, también exceden el rango aceptable, excepto la distribución multivariada t-Student para un nivel de confianza del 95%. En contraste, el número de violaciones del modelo VaR  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano se encuentra dentro del rango admisible de excepciones, durante el período de crisis; lo cual sugiere que este modelo tiene un mejor desempeño durante períodos de turbulencias financieras que el modelo VaR bajo la hipótesis multivariada Gaussiana, t-Student y Cauchy.

<sup>2</sup> En este caso, se hace referencia a que el modelo supone que condicionalmente los retornos siguen una distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana, normal multivariada, t-Student o Cauchy.

**Tabla 5**  
**Backtesting del VaR.**

Nivel de Confianza	Distribución	Backtesting
99.5%	Normal	23
99.5%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	2
99.5%	t-Student	13
99.5%	Cauchy	11
99.0%	Normal	28
99.0%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	5
99.0%	t-Student	19
99.0%	Cauchy	17
95.0%	Normal	56
95.0%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	28
95.0%	t-Student	35
95.0%	Cauchy	42

Fuente: Elaboración propia.

## 5.2. Estadístico de Kupiec

Además, la evaluación del desempeño del VaR se realiza en términos de su probabilidad de cobertura empírica. Con este objetivo, se aplica la prueba de la razón de verosimilitud de Kupiec dada en Kupiec (1995), la cual estima si la proporción esperada de violaciones es igual al nivel de significancia  $\alpha$ .

El estadístico de Kupiec es una prueba incondicional porque cuenta el número de violaciones durante todo el período. Además, como indica Kupiec (1995), las pruebas de cobertura incondicional tienen bajo poder con respecto a la hipótesis alternativa, si el tamaño de la muestra es pequeño; sin embargo, este problema no existe aquí, ya que en la presente investigación, la muestra seleccionada cubre un largo período de tiempo.

El estadístico de prueba de Kupiec para muestras grandes se distribuye como una Ji-cuadrada con un grado de libertad, y está dado por:



$$LR_{UC} = -2 \ln \left[ \frac{\alpha^n (1 - \alpha)^{T-n}}{p^n (1 - p)^{T-n}} \right]$$

donde  $T$  representa el tamaño de la muestra,  $n$  el número de violaciones y  $p=n/T$  es el porcentaje de violaciones. La hipótesis nula se rechaza con un nivel de significancia del 1% si  $LR_{UC} \geq 6.635$ , es decir, si el valor del estadístico de Kupiec excede o es igual al valor crítico de una distribución Ji-cuadrada, con un grado de libertad y un nivel de significancia del 1%.

En la tabla 6, se presenta un resumen de los resultados de la prueba de la razón de verosimilitud de Kupiec (1995). El símbolo (X) se utiliza para indicar que el modelo VaR analizado cumple con la hipótesis de una cobertura incondicional correcta, es decir, el modelo se acepta como un modelo VaR bien especificado. Los modelos rechazados, debido a la sobreestimación o subestimación del VaR, se indican con asterisco (\*) y signo menos (-), respectivamente.

**Tabla 6**  
**Estadístico de Kupiec**

Nivel de confianza	Distribución	Kupiec
99.5%	Normal	-
99.5%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	X
99.5%	t-Student	*
99.5%	Cauchy	-
99.0%	Normal	-
99.0%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	X
99.0%	t-Student	-
99.0%	Cauchy	-
95.0%	Normal	-
95.0%	$\alpha$ -estable sub-Gaussiana	X
95.0%	t-Student	-
95.0%	Cauchy	X

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 6, se observa que el modelo VaR  $\alpha$ -estable proporciona una cobertura incondicional correcta durante el período de crisis señalado. En contraste, el modelo VaR bajo las distribuciones normal y t-Student presentan un desempeño inferior durante el período de crisis, donde se

sobrestima o subestima el VaR; salvo para el caso de la distribución de Cauchy al nivel de 95% de confianza.

## Conclusiones

En esta investigación, se propuso un modelo GARCH  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano multivariado, el cual combina la propiedad de la distribución  $\alpha$ -estable para modelar colas pesadas con el modelo GARCH, para capturar clúster de volatilidad. La finalidad fue comparar el desempeño de esta especificación, en relación con los casos de la distribución normal, Cauchy y t-Student.

En particular, se realizó la estimación del VaR bajo la hipótesis  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana durante el período de la crisis financiera de 2008, a partir de un portafolio compuesto por 5 activos financieros que cotizan en la BMV.

Los resultados estadísticos sugieren que el modelo VaR  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano proporciona estimaciones del VaR cuyas pruebas de backtesting tienen un mejor desempeño, en períodos de alta volatilidad; es decir, las estimaciones del VaR son más eficientes bajo el supuesto de que los rendimientos siguen una distribución  $\alpha$ -estable sub-Gaussiana durante períodos de turbulencias financieras.

Sin embargo, es necesaria investigación adicional. Por ejemplo, sería conveniente considerar un conjunto mayor de distribuciones de probabilidad que también capturen las características empíricas de las series de datos financieros y comparar su desempeño con el modelo  $\alpha$ -estable sub-Gaussiano aquí propuesto. Además, se podrían emplear funciones cópula para describir las correlaciones entre los rendimientos de las acciones, empleando tanto la distribución estable como la distribución marginal de los activos que conforman el portafolio.

## Referencias

- [1] Barndorff-Nielsen, O.E., Mikosch, T. y Resnick, S.I. (2012). *Lévy Processes: Theory and Applications*, Springer Science & Business Media, New York, NY.
- [2] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.
- [3] Bonato, M. (2012). Modeling fat tails in stock returns: A multivariate stable-GARCH approach. *Computational Statistics*, 27(3), 499–521.
- [4] Byczkowski, T., Nolan, J.P. y Rajput, B. (1993). Approximation of Multidimensional Stable Densities. *Journal of Multivariate Analysis*, 46(1), 13–31. Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0047259X83710444>.

- [5] Cheng, B., y Rachev, S. (1995). Multivariate stable futures prices. *Journal of Mathematical Finance*, 5, 133-153.
- [6] Curto, J.D., Pinto, J.C. y Tavares, G.N. (2009). Modeling stock markets' volatility using GARCH models with Normal, Student's t and stable Paretian distributions. *Statistical Papers*, 50(2), 311-321.
- [7] Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometria*, 50(4), 987-1007.
- [8] Engle, R. (2002). Dynamic Conditional Correlation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350. Available at: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1198/073500102288618487#.VyvCUaCAAdvE.mendeley>.
- [9] Fama, E.F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34-105.
- [10] Feldheim, E. (1937). Etude de la stabilité des lois de probabilité. Ph. D. thesis, Faculté des Sciences de Paris, Paris, France.
- [11] Khindanova, I., Rachev, S. y Schwartz, E. (2001). Stable Modeling of Value at Risk. *Mathematical and Computer Modelling*, 34, 1223-1259.
- [12] Kring, S., Rachev, S., Markus, H. y Fabozzi, F. (2009). Estimation of  $\alpha$ -Stable Sub-Gaussian Distributions.pdf. In *Risk Assessment Decisions in Banking and Finance*. 111-152.
- [13] Kupiec, P.H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3(2), 73-84.
- [14] Mandelbrot. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36, 394-419.
- [15] McCulloch, J.H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 15, 1109-1136.
- [16] Mcculloch, J.H. (2000). Estimation of the Bivariate Stable Spectral Representation by the Projection Method. *Computational Economics*, 16(1-2), 47-62.
- [17] Mittnik, S., Doganoglu, T. y Chenyao, D. (1999). Computing the probability density function of the stable Paretian distribution. *Mathematical and Computer Modelling*, 29(10-12), 235-240.
- [18] Mittnik, S., Paoletta, M.S. y Rachev, S.T. (2002). Stationarity of stable power-GARCH processes. *Journal of Econometrics*, 106, 97-107.
- [19] Mittnik, S. y Rachev, S.T. (1989). Stable distributions for asset returns. *Applied Mathematics Letters*, 2(3), 301-304.
- [20] Mittnik, S. y Rachev, S.T. (1993). Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Economics Reviews*, 12, 261-330.
- [21] Mittnik, S., Rachev S., y Paoletta, M. (1997). Stable Paretian Modelling in Finance: Some Empirical and Theoretical Aspects, in R. Adler, R. E. Feldman and M.S. Taqqu (eds).
- [22] Modarres, R., y Nolan, J.P. (1994). A method for simulating stable random vectors. *Computational Statistics*, 9, 11-19.
- [23] Mohammadi, M. (2017). Prediction of  $\alpha$ -stable GARCH and ARMA-GARCH-M models. *Journal of Forecasting*, 36, 859-866.
- [24] Naka, A. y Oral, E. (2013). With Stable Paretian GARCH. *Journal of Business & Economics Research*, 11(1), 47-53.

- [25] Nolan, J.P. (1997). Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Commun. Statist. Stochastic Models*, 13, 759-774.
- [26] Nolan, J. (1999). Fitting data and assessing goodness-of-fit with stable distributions. *Unpublished Manuscript. Washington, DC*, 2(1924). Available at: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/DataAnalysis.pdf>.
- [27] Nolan, J.P. (2001). Maximum Likelihood Estimation and Diagnostics for Stable Distributions. , (January 2001). Available at: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0197-7>.
- [28] Nolan, J.P. (2013). Multivariate elliptically contoured stable distributions: Theory and estimation. *Computational Statistics*, 28(5), 2067–2089.
- [29] Nolan, J.P., Panorska, A.K. y McCulloch, J.H. (2001). Estimation of stable spectral measures. *Mathematical and Computer Modelling*, 34(9–11), 1113–1122.
- [30] Nolan, J.P., y Rajput, B. (1997). Calculation of multidimensional stable densities. *Commun. Statist. Simula*, 24, 551-556.
- [31] Panorska, A., Mittnik, S., and Rachev, S.T., 1995. Stable GARCH Models for Financial Time Series. *Applied Mathematics Letters*, 8(5), 33–37.
- [32] Press, S.J., (1972). Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 842–846.
- [33] Rachev, S.T, y Mittnik, S., (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. New York, NY: Wiley.
- [34] Rachev, S. y Han, S., (2000). Portfolio management with stable distributions. *Mathematical Methods of Operation Research*, 51, 341–352.
- [35] Samorodnitsky, G., y Taqqu, M., 1994. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York: Chapman and Hall.
- [36] Serrano y Mata, (2018). Valor en Riesgo mediante un modelo heterocedástico condicional  $\alpha$ -estable. *REMEF*, 13(1), 1-25.

## Apéndice A: Distribuciones multivariadas

### Distribución estable

Dado un vector estable  $\mathbf{X} \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ , su función característica y de máxima verosimilitud están dadas por:

$$E[\exp(iXt)] = \begin{cases} \exp\left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left(|\gamma t|^{1-\alpha} - 1\right)\right] + i\delta t\right), & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\gamma |t| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln(|\gamma t|)\right] + i\delta t\right), & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

### Función de máxima verosimilitud

$$l(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \vec{\theta})$$

Donde  $\vec{\theta} = S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , el espacio de parámetros es  $\Theta = (0, 2] \times [-1, 1] \times (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$  y  $f(X_i | \vec{\theta})$  es la función de densidad, cuya dificultad para evaluar radica en la ausencia de expresiones analíticas para la función de densidad de probabilidad. Sin embargo, el caso univariado ha sido resuelto (Nolan, 1997; Mittnik, Doganoglu y Chenyao, 1999; Khindanova, Rachev y Schwartz, 2001), y también algunos casos multivariados (Press, 1972; Modarres y Nolan, 1994; Nolan y Rajput, 1997; Nolan, Panorska y McCulloch, 2001).

### Función de densidad multivariada t-Student

$$t(x; \mu, \Sigma) = \frac{\alpha \Gamma[(v+p)/2]}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (pv)^{p/2} |\Omega|^{1/2}} \left[1 + v^{-1}(x - \beta)' \Omega^{-1}(x - \beta)\right]^{-(v+p)/2}$$

Donde  $\Omega$  es una matriz de forma positiva definida,  $v$  son los grados de libertad,  $\beta, \alpha$  son vectores de localización y  $\Gamma$  es la función gamma clásica en  $p$  variables.

### Función de densidad multivariada Cauchy

$$f(x) = \frac{\Omega \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \pi^{-(d+1)/2}}{(\alpha' \alpha + |\beta x|)^{(d+1)/2}}$$

Donde  $\Omega$  es una matriz de forma positiva definida,  $d$  son los grados de libertad,  $\beta, \alpha$  son vectores de localización.

### Función de máxima verosimilitud

En el caso de las distribuciones t-Student, Cauchy y normal se emplea la función de log-verosimilitud usual

$$l = \sum_{i=1}^m \ln (f(x_i; \Theta))$$

Donde  $f(x_i; \Theta)$  es la función de densidad de probabilidad que depende del conjunto de parámetros  $\Theta$ , y  $x_1, \dots, x_m$  son los elementos de la muestra.

Luego, para el estimador  $\hat{\Theta}$ , se tiene que para cada elemento del vector se cumple, que:

$$\sqrt{m}(\hat{\Theta}_i - \Theta_i) \rightarrow N(0, I^{-1})$$

Donde

$$I = Cov(S_i)$$

$$S_i = \frac{\partial \ln[f(x_i; \hat{\Theta}_i)]}{\partial \hat{\Theta}_i}$$

Por tanto, el intervalo de confianza y/o la prueba de significancia estadística se puede llevar a cabo (Barndorff-Nielsen, Mikosch y Resnick, 2012), con las expresiones siguientes  $\hat{\Theta}_i$ :

$$\hat{\Theta}_i \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{m} (I^{-1})_{\hat{\Theta}_i \hat{\Theta}_i}}$$

$$t = \frac{\hat{\Theta}_i - \Theta}{\sqrt{V[\hat{\Theta}_i]}}$$

## Apéndice B

**Tabla B.1**  
**Parámetros estimados para la distribución multivariada t-Student**

Parámetros	Coeficientes estimados				
<b><math>\beta</math></b>	<b>0.00072</b> (0.00043) [1.67]	<b>0.00075</b> (0.00046) [1.66]	<b>0.00069</b> (0.00039) [1.79]	<b>0.00083</b> (0.00053) [1.57]	<b>0.00064</b> (0.00042) [1.54]
<b><math>\alpha</math></b>	<b>0.00030</b> (0.00018) [1.61]	<b>0.00061</b> (0.0004) [1.53]	<b>0.00043</b> (0.00022) [1.96]	<b>0.00040</b> (0.00023) [1.72]	<b>0.00022</b> (0.00012) [1.78]
<b><math>\nu</math></b>	<b>3.76523</b> (2.06881) [1.82]				
<b><math>\Omega</math></b>	ARA	COMER	FEMSA	GCARSO	TELEVISIA
	<b>0.00027</b> (0.00015) [1.79]				
	<b>0.00009</b> (0.00005) [1.94]	<b>0.00029</b> (0.00017) [1.75]			
	<b>0.00007</b> (0.00004) [1.51]	<b>0.00007</b> (0.00004) [1.59]	<b>0.00018</b> (0.0001) [1.89]		
	<b>0.00009</b> (0.00006) [1.55]	<b>0.00009</b> (0.00005) [1.66]	<b>0.00006</b> (0.00004) [1.61]	<b>0.00024</b> (0.00013) [1.87]	
	<b>0.00009</b> (0.00005) [1.69]	<b>0.00008</b> (0.00004) [1.8]	<b>0.00009</b> (0.00004) [1.93]	<b>0.00008</b> (0.00004) [1.92]	<b>0.00019</b> (0.00012) [1.56]

Nota. Entre paréntesis se tiene el error estándar y entre corchetes el estadístico t. Fuente: Elaboración propia.

**Tabla B.2**  
**Parámetros estimados para la distribución multivariada Cauchy**

Parámetros	Coeficientes estimados				
<b><math>\beta</math></b>	<b>0.00057</b>	<b>0.00062</b>	<b>0.00047</b>	<b>0.00060</b>	<b>0.00066</b>
	(0.00029)	(0.0004)	(0.00027)	(0.00031)	(0.00041)
	[1.95]	[1.54]	[1.72]	[1.93]	[1.59]
<b><math>\alpha</math></b>	<b>0.00101</b>	<b>0.00219</b>	<b>0.00193</b>	<b>0.00198</b>	<b>0.00054</b>
	(0.00065)	(0.00122)	(0.00112)	(0.00114)	(0.00034)
	[1.55]	[1.79]	[1.73]	[1.74]	[1.57]
<b><math>\Omega</math></b>	ARA	COMER	FEMSA	GCARSO	TELEVISIA
	<b>0.00020</b>				
	(0.00013)				
	[1.49]				
	<b>0.00007</b>	<b>0.00022</b>			
	(0.00004)	(0.00015)			
	[1.88]	[1.44]			
	<b>0.00005</b>	<b>0.00005</b>	<b>0.00014</b>		
	(0.00002)	(0.00004)	(0.00008)		
	[1.97]	[1.42]	[1.71]		
	<b>0.00006</b>	<b>0.00007</b>	<b>0.00005</b>	<b>0.00018</b>	
	(0.00004)	(0.00005)	(0.00002)	(0.00013)	
	[1.44]	[1.43]	[1.95]	[1.44]	
	<b>0.00007</b>	<b>0.00006</b>	<b>0.00007</b>	<b>0.00006</b>	<b>0.00015</b>
	(0.00005)	(0.00004)	(0.00004)	(0.00004)	(0.00012)
	[1.42]	[1.98]	[1.62]	[1.74]	[1.91]

Nota. Entre paréntesis se tiene el error estándar y entre corchetes el estadístico t. Fuente: Elaboración propia.





## Determinantes del aumento o disminución de empresas: Análisis por entidad federativa y estrato de edad

### The Determinants of the Increase and Decrease in the Number of Firms: An Analysis by State and Age Stratum

Rolando I. Valdez<sup>\*</sup>

Eder J. Noda Ramírez<sup>\*\*</sup>

---

#### Información del artículo

Recibido:  
18 enero 2017

Aceptado:  
20 febrero 2018

**Clasificación JEL:**  
D22; E32; L25; L26

**Palabras clave:**  
Edad de empresas;  
determinantes; datos  
panel

---

#### Resumen

En este trabajo, se pone a prueba la hipótesis de que los mismos factores afectan de manera distinta el aumento o disminución de empresas, según su edad. Para ello, se usan dos modelos de datos panel, cuya variable dependiente es el estrato de edad de la empresa: recién nacida, joven, adulta y mayor. En total, se estiman ocho ecuaciones utilizando variables explicativas de tipo económico y social. Entre los resultados más importantes destaca que el PIB, PIB *per cápita*, la TIEE, la Tasa de interés bancaria y la liquidez de la economía ejercen el mismo efecto, *ceteris paribus*, sobre la cantidad de empresas, independientemente de su edad. No obstante, la migración y la inseguridad afectan solo a las empresas recién nacidas y a las jóvenes.

---

<sup>\*</sup>Universidad Autónoma de Baja California. Av. De las Limas 9342-11A, El Refugio. C.P. 22253. Tijuana, Baja California. [rvaldez35@uabc.edu.mx](mailto:rvaldez35@uabc.edu.mx)

<sup>\*\*</sup>Universidad Iberoamericana. San Luis Potosí No. 13 dpto. 202, col. Belisario Domínguez, C.P. 91055, Xalapa, Veracruz. [eder.noda@gmail.com](mailto:eder.noda@gmail.com)



---

**Article information**

Received

18 January 2017

Accepted

20 February 2018

---

**JEL Classification:**

D22; E32; L25; L26

**Keywords:**

Firm's age;

Determinants; Panel

data

---

**Abstract**

In this present study, the hypothesis that is tested is that the same factors diversely affect the ups and downs in the number of firms, taking into consideration their age. To prove this, there are two specific panel data models, whose dependent variable is the firm's age stratum: infant, young, adult and elderly. Overall, eight equations are estimated, taking into account economic and social explanatory variables as well. The main results highlight that *gdp*, *gdp per cápita*, the interest rate, the banking interest rate and economic liquidity equally impact, *ceteris paribus*, the number of firms, independent to their age. However, migration and social insecurity impact only infant firms as well as young firms.

---

**Introducción**

El estudio de la edad de las empresas es por sí mismo escaso en la literatura económica. Sin embargo, algunos textos abordan este tema a partir del análisis microeconómico; específicamente desde la teoría del productor, que tiene que ver con la escala óptima, la cual está relacionada, a su vez, con los costos. Por otro lado, otros trabajos empíricos están enfocados en explicar la entrada y salida de empresas, es decir, aquellas que nacen y las que culminan un ciclo de vida; lo cual en cierta forma limita el alcance de dichos trabajos, al solo estudiar los dos extremos de la edad de las empresas. Más aún, la relación entre agregados económicos con la edad de las empresas también está limitada al estudio del nacimiento de estas, así como a su salida del mercado. En la literatura, se ha omitido el análisis para la edad de las empresas como tal, cuestión que este documento aborda, ya que aquí se contrasta la hipótesis de que los mismos factores provocan, en diferente dirección, el aumento (o la disminución) de la cantidad de empresas según su edad. Lo cual es importante conocer para comprender qué variables de la economía estimulan que existan más o menos empresas de alguna determinada edad. El presente trabajo se diferencia de otros, porque se enfoca en cuatro estratos de edad, y utiliza las mismas variables explicativas para corroborar la hipótesis previamente descrita.

Una característica común e inherente a las empresas es el ciclo de vida. A diferencia de los seres vivos, en las firmas es indefinido, ya que la permanencia de estas en el mercado no depende de causas biológicas, sin embargo, pasan por diferentes etapas desde que nacen, maduran y llegan a una edad mayor; algunas se mantienen funcionando, y otras dejan de hacerlo

en cualquiera de las etapas de su ciclo. Esta característica permite diferenciar a las empresas entre sí, ya que afrontan los aspectos internos y externos de múltiples maneras.

El ciclo de vida está asociado con la edad de las empresas. La primera etapa del ciclo, el nacimiento, es en donde inicia actividades la firma. Si bien existe un periodo previo de planeación que también es importante, por el tema del financiamiento, los procesos legales, fiscales, etc., no está considerado en el ciclo de vida del negocio, debido a que es un aspecto que afecta más al emprendedor que a la firma. Después del nacimiento, vienen diversas etapas, que pueden caracterizarse de diferentes maneras, según el enfoque de cada investigador. No obstante, en las etapas posteriores al nacimiento de la empresa, se define el rumbo de la misma; es aquí donde se toman decisiones respecto de mantenerse o salir del mercado, considerando alguna experiencia y retroalimentación sobre el funcionamiento de la firma.

Lo anterior deja claro que, a cada edad, las empresas enfrentan diferentes escenarios que implican la consideración de diversos factores, tanto internos como externos, que les permitan continuar, crecer, expandirse, mejorar, entre otros. Esta diferenciación implica que para comprender fenómenos de entrada y salida de empresas, debe distinguirse la edad en la que estas se encuentran, así como el contexto socioeconómico. Es poco informativo enmarcar en el mismo análisis a todas las empresas que inician o terminan operaciones, si no son reconocidas por sus edades; sobre todo para las segundas, ya que la salida puede ocurrir en cualquier momento. Por lo tanto, interesa saber las causas para algunas de las etapas por las que cruza cada empresa.

Dentro de las causas que implican una mayor o menor existencia de empresas de determinada edad, están los agregados económicos; interesa saber en qué sentido y magnitud afectan, los cambios de la economía en su conjunto a los grupos de empresas, según sus edades. Este tipo de información es útil para comprender, desde otra perspectiva, un posible ciclo de vida de las firmas.

Este trabajo tiene como objetivo evaluar los efectos que tienen algunos agregados económicos y sociales en la existencia de empresas para un determinado estrato de edad, identificando a las recién nacidas, jóvenes, adultas y mayores, para las entidades federativas de México en los años 2003, 2008 y 2013. En consecuencia, se espera corroborar la hipótesis de que los mismos factores ejercen impactos diferenciados para cada estrato de edad de las empresas.

## **1. Revisión de la literatura**

Uno de los trabajos pioneros que considera el papel de la edad de las empresas es el de Evans (1987), quien establece las relaciones que existen entre el crecimiento, el tamaño y la edad de las mismas. Dentro de los

hallazgos más importantes de este autor, se encuentra que la tasa de crecimiento de la firma es decreciente con respecto al tamaño y a la edad; lo que implica que las empresas mayores o adultas crecerán a tasas más bajas que las jóvenes o las recién nacidas. También, el autor encuentra que la edad de la firma incrementa las probabilidades de que esta sobreviva. Con estos resultados, está en posición de rechazar la ley de Gibrat, que indica que el crecimiento y el tamaño de las empresas son independientes entre sí, para una industria determinada en un periodo dado. Y, por transitividad, la edad que se encuentra asociada a un mayor tamaño, también aplicaría para dicha ley.

Más aún, el autor encuentra que la edad de la firma es un determinante importante de su crecimiento, la variabilidad de este crecimiento y también de su disolución. Por lo tanto, su estudio abarca una dinámica amplia sobre el ciclo de vida de las empresas, que es muy importante estudiar, ya que es necesario comprender los momentos en donde se tienen más probabilidades de sobrevivir o, contrariamente, de disolverse. Otros trabajos, que también encuentran evidencia de que la edad de la empresa tiene una relación negativa con el crecimiento de la misma, son los de Mansfield (1962) y Dunne y Hughes (1994), por mencionar algunos.

El hecho de que el crecimiento de las empresas sea decreciente conforme su tamaño aumenta, se debe a que dejan de observarse aquellas firmas de tamaño pequeño que crecen lentamente (Mansfield, 1962). Sin embargo, cabe el razonamiento del mismo autor cuando ejemplifica que, de acuerdo con la ley de Gibrat, una empresa que vende 100 millones de dólares al año tiene la misma probabilidad de duplicarse que una que vende 100 mil dólares anuales. Lo anterior implica que, la lógica detrás de la ley de Gibrat es que los ingresos (o costos) de las firmas son proporcionales a su tamaño, lo cual es cuestionable actualmente; por ejemplo, a la hora de considerar el sector de servicios basados en conocimiento.

La edad de la empresa tiene una relación inherente tanto con el crecimiento como con la supervivencia. Una empresa adulta o mayor, sin duda ha sobrevivido durante un periodo de tiempo y debió haber crecido, en un sentido amplio; aunque, no necesariamente, pues mantener un tamaño constante también puede considerarse como supervivencia: un negocio exitoso no necesariamente tiene que expandirse o incrementar su tamaño, sino permanecer en el mercado.

Las empresas deben enfrentar situaciones internas y externas en el espacio donde se desempeñan, con el único objetivo de permanecer en el mercado. Algunas firmas logran sobrevivir, crecer o expandirse, mientras otras no logran dicho objetivo y terminan saliendo.

Las fluctuaciones macroeconómicas evidentemente afectarán de forma distinta a cada empresa, según las características que esta tenga. La edad es una característica relevante que es poco evaluada en los trabajos relacionados

con la supervivencia de las empresas. Un trabajo pionero en este rubro es el de Boeri y Bellmann (1995), quienes evalúan los efectos de los agregados económicos en el crecimiento y la supervivencia de firmas. Los autores encuentran que las empresas son insensibles a las fluctuaciones económicas, sin embargo, cuando desagregan las firmas por cohorte de edad, muestran una ligera sensibilidad ante dichas fluctuaciones. La explicación que los autores ofrecen está relacionada con el tamaño que alcanzan las empresas mayores, mismas que ante los *shocks* externos, tienen la posibilidad de encogerse, mientras que para las firmas recién nacidas o jóvenes, asociadas a un tamaño pequeño, su primera opción es la salida.

Sin embargo, no solo el tamaño de la empresa es determinante en su salida, las empresas más jóvenes tienen problemas con el capital humano porque carecen de empleados con altos conocimientos en el campo financiero. Existen diversos factores que permiten que las firmas sobrevivan, por ejemplo, empresarios con más educación y con mayor financiamiento desarrollan negocios que permanecen más tiempo en el mercado (Bates, 1990). Una mayor educación se refleja en mejores capacidades gerenciales, y el financiamiento inicial se traduce en empezar la empresa con la máxima capacidad posible. Si bien el mayor financiamiento incrementa las posibilidades de éxito de la firma que comienza, aquellos emprendedores con mayores recursos financieros tienen mayores probabilidades de que sus negocios prosperen (Holtz-Eakin, Joulfaian, & Rosen, 1994).

Por su parte, las empresas más viejas son incapaces de adaptarse a los cambios externos que se generan en la economía (Tornhill & Amit, 2003). Estos cambios pueden estar relacionados con el mercado, o incluso con ciertos aspectos institucionales del país según donde residen.

Las restricciones de liquidez condicionan el nacimiento de empresas, no obstante, no se ha explorado cómo afecta este factor a las empresas jóvenes o adultas, por lo tanto, el acceso al crédito es un factor determinante para el éxito de los negocios. García-Quevedo *et al.* (2014), evalúan la hipótesis de que las restricciones financieras y de liquidez, por parte de la demanda, afectan más a las empresas jóvenes que a las adultas o mayores, en España, durante el periodo 1990 a 2008. Estos autores encuentran evidencia consistente con dicha hipótesis, es decir, la condición del mercado orienta en buena medida a la permanencia de las firmas jóvenes; por tal motivo, es necesario evaluar cómo afectan el acceso al crédito y la liquidez en el nacimiento de empresas. Por otro lado, también es interesante conocer el efecto sobre las firmas que ya han sobrevivido por algún tiempo. Al respecto, Sánchez-Vidal y Martín-Ugedo (2008) prueban la hipótesis de que, según la edad de la firma, recurren a diferentes tipos de financiamiento, particularmente, las empresas adultas y mayores recurren a préstamos formales, tales como bancos y otras instituciones crediticias, mientras que las recién nacidas, lo hacen con fondos propios. Su evidencia les impide sostener

esta afirmación, debido a que obtienen resultados opuestos a la hipótesis nula: las firmas adultas y mayores se financian con recursos propios gracias a la obtención de beneficios económicos, mientras las empresas recién nacidas y jóvenes adquieren considerables deudas para financiarse. Estos resultados son consistentes con los de Pfaffeymayr, Stöckl y Winner (2013), quienes encuentran que las empresas mayores tienen menores índices de deuda que las empresas jóvenes o las recién nacidas, resultado consistente con el de Huynh y Petrunia (2010).

El bajo costo del capital se asocia a un tema de liquidez y financiamiento al que tienen acceso los emprendedores, por lo tanto, en el nivel agregado, la estabilidad de precios y la tasa de interés son fundamentales para el acceso al desarrollo de negocios, independientemente de su edad; sin embargo, la magnitud con que cada variable afecta a un determinado grupo de empresas jóvenes o adultas, es desconocida.

Un resultado que explícitamente no destaca, pero sin duda es una muestra de que el entorno macroeconómico importa, y por lo tanto debe ser considerado, fue expuesto por Pfeiffer y Reize (2000), sobre las empresas iniciadas por desempleados tanto en Alemania del Este como del Oeste, mostrando mejores condiciones y probabilidades de supervivencia las de la segunda región que las de la primera. Aunque los autores no destacan estas relevantes diferencias macroeconómicas, conviene hacer esta observación acerca de la Alemania dividida en dos regímenes de diferente organización de la actividad económica, una orientada por el mercado (la del oeste), y la otra por el Estado (la del este).

Bhattacharjee *et al.* (2009), sostienen que el ambiente macroeconómico es el más importante para el desarrollo de los negocios; mientras la quiebra de empresas se extiende principalmente cuando existen periodos de recesión económica, la compra de estas crece mientras la economía está recuperándose. En contraste, Highfield y Smiley (1987) hacen una afirmación en el mismo sentido, sobre todo porque enfatizan los determinantes macroeconómicos para la entrada de empresas, por ejemplo, las bajas tasas del crecimiento del PIB e inflación o el alto desempleo. Audretsch y Acs (1994) hacen el mismo hallazgo sobre el desempleo, como principal determinante del nacimiento de empresas. Cabe señalar que es desconocida la relación entre el desempleo y las empresas adultas y mayores, por lo tanto, es necesario analizar este tema.

Por otro lado, Ilmakunnas y Topi (1999) elaboran un trabajo empírico para medir las influencias microeconómicas y macroeconómicas en la entrada y salida de firmas en la industria manufacturera de Finlandia. Sobre las segundas, sus resultados no son concluyentes, sin embargo, mencionan rubros interesantes que la literatura aborda, como el desempleo; también consideran la oferta de crédito y las restricciones por el lado de la tasa de

interés real, esta última es causa fundamental de la salida de empresas en el Reino Unido; aunque el crédito y los beneficios también influyen en que las firmas fallen (Liu, 2004).

En otro estudio, Benavente y Külzer (2008) investigan las causas de la entrada y salida de las empresas. Su estudio demuestra que el PIB y el desempleo tienen un impacto negativo, es decir, propician más la salida que la entrada de firmas.

En México, es escaso el estudio de los efectos macroeconómicos sobre las empresas según su edad. Se pueden identificar casos que analizan por separado algunos de estos agregados y, principalmente, se enfocan en el emprendimiento. Por ejemplo, Hernández-Trillo, Pagan, y Paxton (2005) estudian el capital inicial, las microempresas y la eficiencia técnica. Estos autores investigan las condiciones de eficiencia iniciales de las microempresas, a través de un modelo de fronteras estocásticas, y obtienen como resultados que las empresas que reciben préstamos bancarios de prestamistas o, en general, financiamientos formales, presentan una escala más eficiente que las que son inicialmente financiadas por familiares o amigos. Por lo tanto, el tipo de financiamiento es importante considerarlo como un elemento al que pueden responder de forma diferente las empresas.

Rangel y Torre (2015) investigan el impacto que tienen las variables como la desregulación para la entrada de empresas, la fortaleza financiera de los estados, el crimen y la rentabilidad potencial de mercado en los costos para la entrada de empresas a nivel estatal. Estos autores encuentran que los esfuerzos por desregular la entrada, así como la fortaleza financiera de los estados son dos factores que disminuyen el costo de la entrada de firmas al mercado, mientras que el crimen y altos niveles de PIB per cápita lo elevan.

Los trabajos hechos para México concentran su atención principalmente en el emprendimiento, mientras que la literatura que considera empresas jóvenes, mayores o adultas es prácticamente inexistente, en parte debido a que la información para llevar a cabo dicho análisis tampoco existía; sin embargo, algunos datos están disponibles para el uso público a partir de 2014.

En este trabajo se busca considerar también a las firmas con mayor edad además de las nacientes, debido a que “las empresas de edad diferente reaccionan de manera distinta al mismo conjunto de perturbaciones”, Boeri y Bellmann (1995, pág. 495); también presentan diferentes ciclos dinámicos, según sean jóvenes o adultas (Fort, Haltiwanger, Jarmin, & Miranda, 2013).

Dentro de la revisión de la literatura, fueron identificadas diferentes variables que empíricamente han sido utilizadas para evaluar el impacto sobre la entrada y salida de firmas, así como la edad de estas, estas variables son mostradas a continuación en el cuadro 1, también son presentados los trabajos en donde las utilizan.

**Cuadro 1**  
**Variables que determinan entrada, salida y edad de las empresas**

Variable	Trabajo
<b>PIB</b>	Bhattacharjee et al. (2009); Highfield y Smiley (1987); Benavente y Küzler (2008).
<b>PIB per cápita</b>	Bhattacharjee et al. (2009); Rangel y Torre (2015).
<b>Desempleo</b>	Highfield y Smiley (1987); Audretsch y Acs (1994); Boeri y Bellmann (1995); Ilmakunnas y Topi (1999); Pfeiffer y Reize (2000); Benavente y Küzler (2008).
<b>Riesgo</b>	Boeri y Bellmann (1995); Rangel y Torre (2015).
<b>Innovación</b>	Boeri y Bellmann (1995).
<b>Financiamiento</b>	Holtz-Eakin, Joulfaian y Rosen (1994); Sánchez-Vidal y Martín-Ugedo (2008); Pfaffermayr, Stockl y Winner (2013); Huyn y Petrunia (2010); Liu (2004); Hernández-Trillo, et al. (2005); Bates (1990).
<b>Tasa de interés</b>	Ilmakunnas y Topi (1999).
<b>Liquidez</b>	García-Quevedo, Pellegrino y Vivarelli (2014).

Fuente: Elaboración propia.

## 2. Metodología y datos

Los trabajos revisados en el apartado previo carecen de modelos teóricos a los que pueda recurrirse para justificar teóricamente la inclusión de variables para explicar la existencia de empresas. En otras palabras, la literatura existente sobre la edad de las empresas y los agregados socioeconómicos carece de justificación teórica. Ante la ausencia de un modelo teórico para explicar la edad de las empresas, es necesario recurrir al método inductivo para especificar un modelo econométrico que permita aproximar las variables que deben considerarse para el objetivo propuesto, tomando como referencia las identificadas en la revisión de la literatura.

Por hipótesis, es esperado que los mismos factores afecten de forma diferente la existencia de empresas según su edad, la suma de los factores puede aumentar o disminuir la cantidad de empresas en algún estrato de edad determinado, es decir,



$$\begin{aligned}
 Y &= f\left(\sum X\right) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 Z &= f\left(\sum X\right)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

En donde,  $Y$  es la cantidad de empresas de una edad determinada y  $Z$  es la cantidad de empresas de otra edad, excluyente a las que están en  $Y$ ; mientras que  $X$ , es una matriz de variables explicativas. La sumatoria de estas explican, en su conjunto, la cantidad de empresas por estrato de edad.

En otras palabras, el valor esperado de empresas en el estrato de edad  $Y$  y  $Z$  es una función lineal de los siguientes elementos,

$$\begin{aligned}
 E(y_{it} | \mathbf{x}_{it}, c_i) &= \beta_0 + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i \\
 &\vdots \\
 E(z_{it} | \mathbf{x}_{it}, c_i) &= \gamma_0 + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\gamma} + c_i
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

En donde  $y_{it} \dots z_{it}$  son variables que caracterizan la cantidad de empresas de la edad  $y$  a la  $z$ , en cada unidad  $i$  en el periodo  $t$ . Mientras que  $\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} = \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} \dots + \beta_k x_{itk}$  y  $\mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 x_{it1} + \gamma_2 x_{it2} \dots + \gamma_k x_{itk}$ . Por su parte,  $c_i$  es un efecto no observado para cada  $i$ , que será explicado más adelante.

Con base en lo anterior, el planteamiento general del modelo econométrico es como sigue,

$$y_{it} = x_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + d_t\boldsymbol{\theta} + u_{it} \tag{3}$$

Note que ha sido incluido un elemento  $d_t$  que varía en el tiempo, pero que es el mismo para las entidades federativas, mismo que debe entenderse como factores que son iguales para todas las observaciones de la muestra, que cambian en el tiempo, pero no entre las  $i$ . El término  $u_{it}$  es un error idiosincrático que cambia tanto entre las observaciones como en el tiempo y sigue una distribución normal, con media cero y varianza constante.

Con la estructura expuesta en la ecuación 3, es necesario que la especificación econométrica considere una transformación logarítmica debido a que se buscan relaciones de largo plazo entre las variables dependientes y las explicativas, así como efectos del tipo *ceteris paribus*, por lo que la ecuación a estimar es expresada como sigue:

$$\begin{aligned} \ln(EMP_{it}^k) = & c_i + \ln(PIB_{it})\beta_1 + \ln(PIBpc_{it})\beta_2 + \ln(DESO_{it})\beta_3 \\ & + \ln(REM_{it})\beta_4 + \ln(MIG_{it})\beta_5 + \ln(HOM_{it})\beta_6 \\ & + \ln(CDES_{it})\beta_7 + \ln(CCOM_{it})\beta_8 + TIE_t\beta_9 \\ & + TIBANC_t\beta_{10} + \ln(LIQ_t)\beta_{11} + u_{it} \end{aligned} \quad (4)$$

En donde se tienen  $k = 4$  variables dependientes, cada una de estas es la cantidad de empresas en un estrato de edad para la entidad federativa  $i$ , en el año  $t$ . Los censos económicos de los años 2004, 2009 y 2014, que a su vez contienen información de 2003, 2008 y 2013, ofrecen esta información por cuatro estratos de edad, mismos que son: 1) recién nacidas, 2) jóvenes, 3) adultas, 4) mayores. Las primeras son empresas con menos de 3 años de antigüedad, las segundas se encuentran en un rango de 3 a 5 años. Por su parte, las adultas son aquellas empresas que tienen más de 5 años hasta 10, mientras las mayores tienen más de 10 años (INEGI, 2014).

El siguiente cuadro contiene estadísticos descriptivos de los cuatro estratos de edad de las empresas, en donde se indica la cantidad de observaciones, las cuales son 96 debido a que son 32 entidades federativas y tres años en los que son observadas dichas variables. La distribución del promedio de los cuatro estratos es relativamente uniforme por años, no obstante, las empresas adultas y mayores muestran un incremento considerable, debido a que, en el periodo de 10 años, estas prácticamente se duplican, fenómeno que no es observado con las empresas recién nacidas y jóvenes.

Los antecedentes históricos y las dinámicas internas de las entidades federativas conducen en buena medida la actividad económica. Los estados se distinguen en aspectos como su talla demográfica, factores geográficos, entre otros, que naturalmente los llevan a tener diferencias entre sí. Estas disparidades repercuten en la vocación estatal de la actividad y, con esto, en la dinámica de las empresas. Es esperado que algunas entidades tengan mayor capacidad emprendedora que otras, de igual forma, existen algunas que mantienen a las empresas más longevas del país y que, con base en la literatura, generan fenómenos económicos que es necesario estudiar.

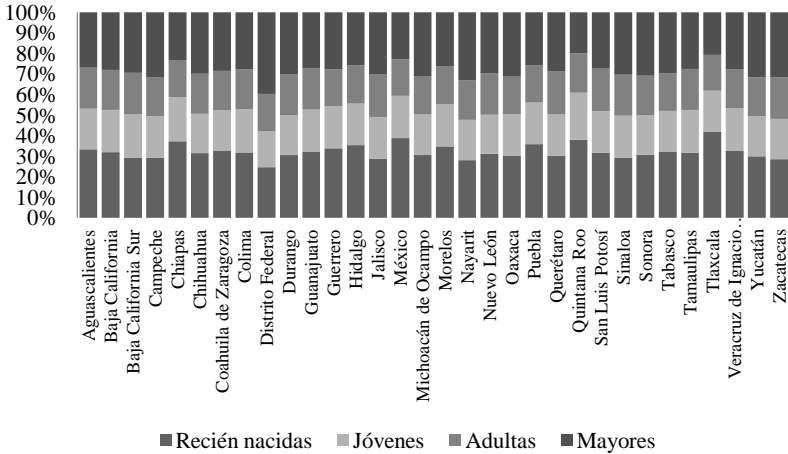
Tlaxcala tenía el liderazgo en empresas recién nacidas en el año 2003, tal como es mostrado en la figura 1, ya que poco más de 40% de sus empresas eran de reciente creación; mientras que en el Distrito Federal, la proporción de empresas recién nacidas era de poco más de 24%, siendo la más baja de todo el país. A Tlaxcala le siguen las entidades de Chiapas, Hidalgo y Quintana Roo con mayor cantidad de empresas recién nacidas. En esta última, junto con Tlaxcala, se localizan la menor proporción de empresas mayores, con aproximadamente 20% del total.

**Cuadro 2**  
**Estadísticos descriptivos de las variables dependientes**

	Variable	Obs.	Media	Desv. Estándar	Min.	Max.
2003	Recién nacidas	32	30073	27679	4924	14119 2
	Jóvenes	32	18723	16320	3587	75007
	Adultas	32	17839	15436	3428	65090 13606
	Mayores	32	27276	26749	4991	0
2008	Recién nacidas	32	36655	32905	7041	16727 9
	Jóvenes	32	23633	20577	4834	99276
	Adultas	32	22037	18571	4446	82470 14577
	Mayores	32	34051	30460	6483	3
2013	Recién nacidas	32	36953	32957	8143	16746 3
	Jóvenes	32	19504	16966	4493	82250 13772
	Adultas	32	31718	28545	6227	5 17534
	Mayores	32	44035	38824	8827	7

Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI, 2003, 2008, 2013.

**Figura 1**  
**Distribución porcentual de las empresas según edad, 2003**



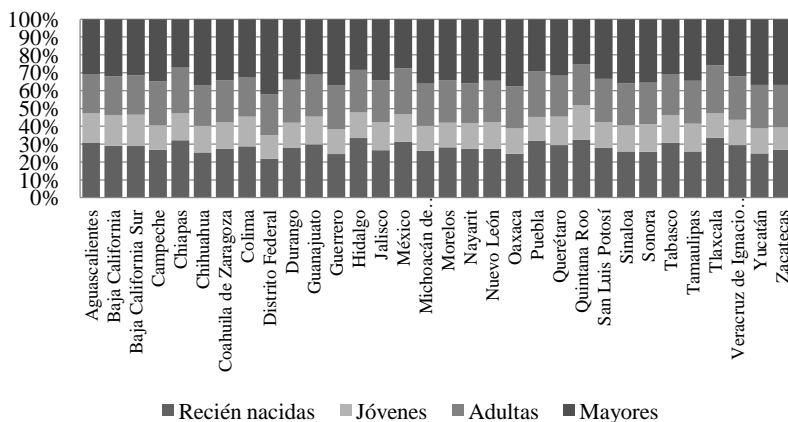
Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI, 2003.

El Distrito Federal poseía en 2003 la mayor proporción de empresas mayores, ya que es una entidad en donde históricamente se ha concentrado la actividad económica y, con esto, las empresas han permanecido durante un periodo considerable de tiempo.

Cabe señalar que la proporción de empresas jóvenes y adultas representan alrededor de 20% en la mayoría de las entidades, los valores para ambos grupos de edad oscilan entre 17% y 21%, con lo cual las diferencias entre las entidades residen entre las empresas recién nacidas y mayores.

En la figura 2, se muestran las distribuciones porcentuales de las empresas según su edad, para cada entidad federativa, para el año 2013. Los cambios son notables en las empresas jóvenes, adultas y mayores debido a que es en donde se observan los principales movimientos en la distribución porcentual. Para este año, tanto Tlaxcala como Hidalgo son las entidades con mayor proporción de empresas recién nacidas; sin embargo, en este periodo de quince años esta proporción para Tlaxcala se redujo de 41% a 33%. Las empresas jóvenes incrementaron su dispersión porcentual, pues ahora los valores oscilan entre 12% y 19%, que pertenecen a Zacatecas y Quintana Roo, respectivamente. La proporción de empresas adultas va desde 21% hasta 24% en las entidades federativas, con lo que representan un bloque muy homogéneo para estas.

**Figura 2**  
**Distribución porcentual de las empresas, según edad, 2013**



Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI, 2013.

La proporción de empresas mayores reporta la mayor variabilidad entre las entidades federativas, debido a que los porcentajes van desde 25% hasta 42%, que pertenecen a Quintana Roo y el Distrito Federal, respectivamente.

Con lo anterior, es posible señalar la existencia de un ciclo de madurez de las empresas en México, ya que puede observarse cómo varían las proporciones de un censo a otro para cada rango de edad de las firmas, lo cual explica que los estratos de las adultas y las mayores sean cada vez de mayor tamaño.

Por su parte, las variables independientes fueron seleccionadas con base en la revisión de la literatura. La mayoría de ellas refleja algún aspecto económico, tales como el PIB, que representa el ingreso de cada entidad, incluso el tamaño de esta; el PIB *per cápita*, como un indicador de desarrollo; la cantidad de personas desocupadas, que es utilizada en varios de los trabajos previamente citados; el flujo de créditos otorgados, tanto por la banca de desarrollo como la banca comercial, ambos como fuentes de financiamiento, que es una de las variables en donde más centran su atención los trabajos que estudian este tema; la tasa de interés tanto interbancaria como bancaria debido a que reflejan el costo del dinero, así como los incentivos que puede tener la población para obtener rendimientos de su dinero, ya sea en el mercado de capitales o en el mercado de bienes; la liquidez, medida a través de la masa monetaria, considerando solo el circulante de efectivo, misma que refleja —de alguna manera— la política económica del país. También fueron incluidas variables de tipo social, como las remesas, que también son un tipo de financiamiento no formal: la migración. Las defunciones por homicidios es una variable incluida para controlar el aspecto de la inseguridad en las entidades federativas.

**Cuadro 3**  
**Descripción de las variables independientes**

Variable	Descripción	Unidad de medida	Fuente
<b>PIB</b>	Producto Interno Bruto por entidad federativa en precios constantes, base 2008.	Millones de pesos	INEGI
<b>PIBpc</b>	Producto Interno Bruto per cápita por entidad federativa, precios constantes, base 2008.	Millones de pesos por persona	INEGI
<b>DESO</b>	Población desocupada de los últimos dos trimestres del año previo y los dos primeros trimestres del año en curso por entidad federativa.	Población promedio	INEGI
<b>REM</b>	Remesas familiares por entidad federativa.	Millones de pesos (reales)	Banxico
<b>MIG</b>	Migración neta interestatal.	Población	CONAPO
<b>HOM</b>	Defunciones por homicidio por entidad federativa.	Población	INEGI
<b>CDES</b>	Flujo de crédito otorgado por la banca de desarrollo por entidad federativa en precios constantes.	Millones de pesos	Banxico
<b>CCOM</b>	Flujo de crédito otorgado por la banca comercial por entidad federativa a precios constantes.	Millones de pesos	Banxico
<b>TIE</b>	Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio a 91 días.	Tasa promedio anual	INEGI
<b>TIBANC</b>	Tasa de interés bancaria neta en depósitos a seis meses para personas físicas y morales.	Tasa promedio anual	INEGI
<b>LIQ</b>	Masa Monetaria <sup>1</sup> (M1) a precios constantes.	Millones de pesos	Banxico

Fuente: Elaboración propia.

Considerando el modelo propuesto, debe notarse que las últimas tres variables (*TIE*, *TIBANC* y *LIQ*) están agregadas a nivel nacional, mientras el resto varían para cada una de las secciones cruzadas. Es decir, las tasas de interés y la masa monetaria son las mismas para todas las entidades federativas, solo varían en el tiempo. Esto implica que una de estas debe ser excluida de la ecuación, de lo contrario la estimación es imposible de llevar a cabo debido a problemas de colinealidad; en consecuencia, serán estimadas

<sup>1</sup> Además de un indicador de liquidez, la masa monetaria sirve como un instrumento para aproximar la inflación, debido a la estrecha relación que existe entre ambas variables. En el caso particular de este documento, debe considerarse que la inflación no es medida por entidad federativa en México.

dos ecuaciones para poder observar los efectos de todas las variables. El método de estimación consiste en considerar que el elemento  $c_i$  de la regresión está correlacionado arbitrariamente con alguna de las variables explicativas. Además, en las aplicaciones en donde las observaciones son unidades geográficas, como estados o provincias, no pueden tratarse como si fuera una muestra grande obtenida aleatoriamente, por lo que, la estimación debe llevarse a cabo con el supuesto de efectos fijos (Wooldridge, 2016). Esta precisión permite considerar una heterogeneidad inobservable entre las entidades federativas, lo cual hace posible obtener aproximaciones más precisas de los efectos *ceteris paribus* de cada uno de los coeficientes.

La estimación de los errores estándar de los coeficientes es robusta para heterocedasticidad y para correlación serial, a través de calcular los errores estándar para cada entidad federativa (*cluster*), lo cual permite corregir problemas de que los errores estén correlacionados en el tiempo, así como entre las secciones cruzadas.

### 3. Resultados

Los resultados de las estimaciones son mostrados en el cuadro 4, que contiene los coeficientes de las ocho ecuaciones que fueron estimadas. Por una parte, el PIB y el PIB per cápita son consistentes con estimaciones de otros trabajos, y en todos los casos tienen el signo esperado. El efecto del PIB es positivo para las empresas de todas las edades, lo que indica que el ingreso agregado o el tamaño del mercado es relevante para la existencia de firmas, no obstante, este coeficiente no es estadísticamente significativo para las empresas adultas. Por su parte, el PIB per cápita ejerce efectos que son consistentes con resultados obtenidos por Rangel y Torre (2015). Niveles altos de esta variable merman la cantidad de empresas en cualquiera de los estratos de edad, lo cual está relacionado con la elevación de los costos. Anteriormente, solo se había demostrado que el PIB afectaba a las empresas recién nacidas, sin embargo, las empresas jóvenes, adultas y mayores también se ven afectadas negativamente.

Cabe puntualizar que, dado que las variables están expresadas en logaritmos, los estimadores obtenidos representan la elasticidad de largo plazo de la variable dependiente con respecto a la independiente, lo que, desde el punto de vista del cálculo diferencial, es la pendiente. Acs, Desai y Hesse (2008) aseguran que la relación entre desarrollo y cantidad de empresas tiene una forma de “U”; es decir, en una primera etapa, a medida que la economía se desarrolla, la cantidad de empresas disminuye hasta alcanzar un punto mínimo, después de ese punto la cantidad de empresas aumenta conforme la economía se desarrolla. Considerando lo anterior, y que el PIB per cápita es utilizado como indicador de desarrollo, además que el coeficiente (la pendiente) es negativo, puede asegurarse que las entidades se hallan en el

primer tramo de la curva en forma de “U”, debido a que el aumento del PIB per cápita implica una disminución de la cantidad de empresas de todas las edades, en donde a las que menos afecta es a las adultas, mientras que las que más se ven afectadas son las jóvenes.

Es importante resaltar un aspecto importante con respecto al PIB y al PIB per cápita: el efecto del primero es mayor que el segundo para las empresas recién nacidas y jóvenes, mientras que para las empresas adultas y mayores sucede lo contrario. En otras palabras, el crecimiento económico provocará que existan más empresas recién nacidas y jóvenes que las que el desarrollo puede provocar que desaparezcan. Caso contrario para las adultas y mayores, en donde el desarrollo hará desaparecer mayor cantidad de empresas que las que el crecimiento económico puede generar.

La población desocupada propicia variaciones positivas en la cantidad de empresas de todas las edades. El grueso de la literatura se enfoca en considerar que el desempleo explica la formación de empresas, siendo estas una salida a dicha condición. Sin embargo, en el presente experimento esta variable no es concluyente, los coeficientes son considerablemente bajos y solo son significativos para las jóvenes y las mayores. Cabe señalar que esta variable está siendo utilizada rezagada, es decir, toma en cuenta los desocupados de un año anterior a la información de la cantidad de empresas, mientras que en el resto de los trabajos, se utiliza la información del mismo periodo para ambas variables.

En la literatura del emprendimiento, la relación entre desocupados y la creación de empresas ha sido ampliamente estudiada. Sin embargo, esta relación no limita el que la población que se halla en esta condición no pueda ocuparse en empresas de cualquier edad, de hecho, es un tema que no ha sido explorado hasta este momento. Lo que aquí se ha encontrado, es evidencia de que la población desocupada contribuye a que existan más empresas jóvenes y mayores, en un año posterior.

Las remesas son consideradas como una fuente de financiamiento informal, para este conjunto de datos, y ejercen un impacto negativo sobre la existencia de empresas de entre 5 y 10 años, con una significancia de 5%.

La migración interestatal tiene un impacto positivo en las empresas recién nacidas. De acuerdo con Mungaray y Ramírez-Urquidy (2011), las personas que migran a un lugar determinado carecen de referencias profesionales y personales, así como de conexiones y contactos que les ayuden a encontrar un empleo en el mercado de trabajo; por lo tanto, están razonablemente motivados a emprender un negocio, lo cual corrobora que el coeficiente obtenido en el presente ejercicio, haya sido significativo solo para las empresas recién nacidas.



Cuadro 1  
Resultados de las estimaciones de las ocho ecuaciones

VARIABLES	(1) Recién nacidas	(2) Recién nacidas	(3) Jóvenes	(4) Jóvenes	(5) Adultas	(6) Adultas	(7) Mayores	(8) Mayores
ln(PIB <sub>it</sub> )	0.635*** (0.271)	0.635*** (0.271)	1.034*** (0.161)	1.034*** (0.161)	0.259 (0.260)	0.259 (0.260)	0.444*** (0.215)	0.444*** (0.215)
ln(PIBP <sub>it</sub> )	-0.626*** (0.235)	-0.626*** (0.235)	-1.023*** (0.158)	-1.023*** (0.158)	-0.483* (0.276)	-0.483* (0.276)	-0.555*** (0.239)	-0.555*** (0.239)
ln(DESO <sub>it</sub> )	0.012 (0.037)	0.012 (0.037)	0.062*** (0.021)	0.062*** (0.021)	0.050 (0.039)	0.050 (0.039)	0.095*** (0.033)	0.095*** (0.033)
ln(REM <sub>it</sub> )	-0.018 (0.048)	-0.018 (0.048)	0.057 (0.032)	0.037 (0.032)	-0.139** (0.051)	-0.139** (0.051)	-0.047 (0.034)	-0.047 (0.034)
ln(MIG <sub>it</sub> )	0.259*** (0.069)	0.259*** (0.069)	-0.000 (0.055)	-0.000 (0.055)	0.086 (0.087)	0.086 (0.087)	0.014 (0.070)	0.014 (0.070)
ln(HOM <sub>it</sub> )	-0.077*** (0.028)	-0.077*** (0.028)	-0.069*** (0.019)	-0.069*** (0.019)	-0.038 (0.026)	-0.038 (0.026)	-0.006 (0.021)	-0.006 (0.021)
ln(CDES <sub>it</sub> )	0.008 (0.007)	0.008 (0.007)	-0.001 (0.006)	-0.001 (0.006)	-0.006 (0.012)	-0.006 (0.012)	-0.006 (0.008)	-0.006 (0.008)
ln(CCOM <sub>it</sub> )	0.010 (0.025)	0.010 (0.025)	-0.051** (0.020)	-0.051** (0.020)	-0.065*** (0.031)	-0.065*** (0.031)	-0.035 (0.021)	-0.035 (0.021)
TIE <sub>it</sub>	0.089*** (0.018)	0.042*** (0.007)	0.091*** (0.011)	0.075*** (0.004)	0.109*** (0.024)	0.109*** (0.024)	0.070*** (0.018)	0.003 (0.006)
TIBANC <sub>it</sub>	-0.512*** (0.148)		-0.178* (0.095)		-1.215*** (0.178)		-0.730*** (0.143)	
ln(LIQ <sub>it</sub> )		0.387*** (0.112)		0.134* (0.072)		0.918*** (0.134)		0.551*** (0.108)
C	-0.899 (3.801)	-9.947*** (2.665)	-5.786** (2.171)	-8.922*** (1.735)	8.326*** (2.958)	-13.123*** (4.025)	4.306 (3.128)	-8.585*** (2.993)
N	96	96	96	96	96	96	96	96
R <sup>2</sup>	0.892	0.892	0.920	0.920	0.962	0.962	0.974	0.974

Errores estándar Clúster-Robustos entre paréntesis; \*\*\* p<0.01, \*\* p<0.05, \* p<0.1

La inseguridad, medida a través de las defunciones por homicidio, ejerce un impacto negativo sobre las empresas recién nacidas y jóvenes. Esto sucede porque son empresas que se encuentran en una situación de mayor vulnerabilidad ante el crimen, que las empresas adultas o mayores, debido a que las firmas recién nacidas y jóvenes son de tamaño pequeño principalmente, lo cual provoca que estén más expuestas. Por su parte, las firmas adultas y mayores tienen capacidad superior de reacción ante situaciones de inseguridad, ya sea porque han generado experiencia a través de los años, o porque son de mayor tamaño, lo que es traducido en más recursos para hacer frente a este asunto.

La oferta de créditos de la banca de desarrollo no juega ningún papel significativo en la variación de empresas para ninguna edad. Si bien existen diferencias en los signos para las empresas nacidas y jóvenes con respecto a las adultas y mayores, ninguno de los resultados es concluyente, por lo que es necesario contar con más información para futuros trabajos, debido a que la banca de desarrollo en ocasiones es utilizada para el apalancamiento del crecimiento económico. No obstante, en México, una gran parte del crédito otorgado a través de las instituciones que pertenecen a este rubro, son destinados a vivienda y obra pública.

Por otro lado, la oferta del crédito de la banca comercial sí tiene un papel significativo en las empresas jóvenes y adultas, cuya cantidad de estas se ve afectada de manera negativa. La literatura sugiere que los emprendedores recurren a la banca comercial para financiar sus empresas, sin embargo, se desconoce cuál es la proporción de empresas recién nacidas cuyo capital proviene de un financiamiento formal o de uno informal. Por los resultados aquí obtenidos, puede considerarse que el primero es menos recurrente que el segundo, ya que existen estudios como el de Hernández-Trillo *et al.* (2005), y Rangel y Torre (2015) que indican que es menos accesible el financiamiento formal en México, por lo cual existen altos incentivos para recurrir a préstamos fuera del sistema financiero, a pesar de que eso implica arrancar en condiciones menos favorables para el éxito del negocio; la cuestión aquí es que, una mayor oferta de crédito de la banca comercial repercute en que existan menos empresas jóvenes y adultas.

La tasa de interés interbancaria tiene una relación positiva con la cantidad de empresas de cualquier edad; por cada punto porcentual que dicha tasa aumenta, se tiene un aumento que puede ser de 0.089% o 0.042% de empresas recién nacidas, depende de qué modelo se considere.<sup>2</sup> Por su parte, el aumento en las empresas jóvenes es de 0.091% o 0.075%, respectivamente. En el caso de las empresas adultas y mayores, este

---

<sup>2</sup> Debido a que la tasa de interés solo varía entre el tiempo y no entre las secciones cruzadas (entidades), esta cambia según la ecuación que se estime, ya sea cuando se considera junto con la tasa de interés bancaria o con la liquidez.

coeficiente solo es significativo en una de las dos ecuaciones, puntualmente cuando es considerada la tasa de interés bancaria, en lugar de la liquidez. La cantidad de empresas adultas y mayores aumentará en 0.109% y 0.07%, respectivamente, por cada aumento de un punto porcentual de la TIE. Este resultado es contra intuitivo, debido a que suele suponerse que el aumento en la tasa de interés provocará un movimiento de dinero del mercado de bienes al mercado de capitales, sin embargo, este no es el caso, por el contrario, genera un efecto positivo. Este resultado está ligado con el que es obtenido mediante la variable de la tasa bancaria, la cual genera un efecto negativo en la existencia de firmas de cualquier edad. El impacto es considerablemente superior al que ejerce la TIE sobre la cantidad de empresas; por ejemplo, para las empresas recién nacidas, un aumento de 1% en la tasa bancaria, provocará la disminución de 0.512% la cantidad de empresas recién nacidas; mientras que este efecto para las empresas jóvenes es de 0.178%, para adultas de 1.215% y para las mayores de 0.73%. El comportamiento de la cantidad de empresas con respecto a la tasa de interés bancaria es consistente con el hecho de que, si un emprendedor tiene la opción de invertir su dinero en un negocio o depositarlo en un banco para obtener algún rendimiento por este, y si el banco ofrece un pago superior a lo que el emprendedor espera obtener mediante un negocio, el emprendedor optará por mantener el dinero en el banco, debido a que el rendimiento está garantizado y el riesgo de perderlo es mínimo.

Finalmente, la liquidez de la economía o el dinero circulante ejerce un impacto positivo sobre la cantidad de empresas en cualquiera de las edades, aunque este resulta relativamente mayor para las empresas adultas y mayores. La masa monetaria es un reflejo de la política monetaria del país, que para el caso mexicano es conducido mediante la tasa de interés. Este resultado contrasta con el de esta última, ya que, si la liquidez tiene un impacto negativo sobre la existencia de empresas, la tasa de interés debería tener un efecto contrario, sin embargo, esto no sucede así. El comportamiento debiera ser similar al que sucede entre la tasa bancaria y la liquidez: ambos ejercen el efecto esperado sobre la existencia de empresas. La explicación de esto es que la TIE sirve de referencia para la atracción o repulsión de capitales que no pertenecen al país, los cuales son intercambiados en cartera, en la que se puede invertir desde cualquier parte del mundo.

## **Conclusiones**

En el presente trabajo, se puso a prueba la hipótesis de que los mismos factores afectan de manera diferente la existencia de empresas según su edad. Uno de los hallazgos más relevantes del presente documento es que, en el proceso de crecimiento y desarrollo que se encuentra la economía mexicana, se está generando que nazcan empresas y que las jóvenes se mantengan, ambas por encima de las que el propio proceso de desarrollo destruye como

consecuencia de la elevación de los costos sobre la producción, así como los de la propia vida. De igual forma, el desarrollo de las entidades federativas genera que empresas adultas y mayores desaparezcan en mayor medida que las que el propio proceso de crecimiento económico puede incrementar. Este fenómeno es parte de un proceso que también ha sido observado en otros estudios, como el de Acs, *et al.* (2008).

Los dos factores que logran diferenciar más sus efectos sobre la cantidad de empresas, según su edad, son la migración y la inseguridad. Estos dos elementos solo afectan la existencia de empresas recién nacidas y jóvenes. La migración solo impacta la cantidad de empresas recién nacidas, por cada 1% que esta aumenta, la cantidad de empresas recién nacidas aumentará 0.259%. Por su parte, un incremento de 1% de las defunciones por homicidio en las entidades federativas, provocará una disminución de 0.077% y 0.069% la cantidad de empresas recién nacidas y jóvenes, respectivamente. Este es un aspecto relevante para las entidades federativas, debido a que las estrategias de seguridad descansan en, buena medida, en las decisiones que son tomadas desde los gobiernos estatales; por lo tanto, una política indirecta que permita incrementar tanto la cantidad de empresas nacientes como la de empresas jóvenes (las que tienen entre 3 y 5 años), tiene que ver con la seguridad pública.

Uno de los factores que afecta en el mismo sentido la cantidad de empresas, independientemente de su edad, es la tasa de interés bancaria, lo cual es un aspecto a considerar desde la perspectiva de los diseñadores de política económica y de los organismos reguladores de la banca privada. Si bien, la tasa de interés está relacionada con aspectos de la seguridad de pago de los deudores, además de que en México cada institución financiera es libre de fijar la tasa de manera libre, muchas de estas decisiones están influenciadas por la política económica. En algunos casos, las instituciones financieras utilizan la TIEE como referencia, para entonces decidir la tasa que cobrarán; de modo que, por transitividad, los ajustes en la TIEE tendrán repercusiones en la tasa que fijan los bancos para otorgar créditos. A su vez, la TIEE está relacionada con la cantidad de dinero que circula en la economía, de tal manera que desde el banco central podrían tomarse decisiones, por una vía u otra de las aquí expuestas, con el objetivo de incrementar la cantidad de empresas en las entidades federativas.

Es importante considerar que el presente estudio es llevado a cabo a partir de datos agregados por entidad federativa, del cual pueden obtenerse elasticidades que permiten predecir aumentos o disminuciones de empresas en función de ciertos factores, como los aquí expuestos. No obstante, el presente análisis no debe considerarse como de supervivencia, ya que para ello son requeridos datos sobre la salida o cierre de empresas. Sin embargo, esto podrá considerarse como una posible extensión del presente trabajo.

Otras posibles extensiones del presente trabajo pueden girar en torno a la composición espacial de la edad de las empresas, para determinar si, de alguna manera, la distribución sobre el territorio de estas y su edad sigue alguna distribución aleatoria, o el fenómeno sucede en forma de aglomeraciones. De igual manera, queda pendiente incorporar en el análisis una variable que controle los aspectos de innovación y capacidad emprendedora de las entidades federativas. Por último, se podrían considerar aspectos institucionales y de decisiones de política pública, lo que ayudaría —en el mismo sentido— a explicar con mayor alcance la formación o desaparición de empresas.

## Referencias

- [1] Acs, Z. J., Desai, S., y Hessels, J. (2008). Entrepreneurship, economic development and institutions. *Small Business Economics*(31), 219-234. doi:10.1007/s11187-008-9135-9
- [2] Audretsch, D. B., y Acs, Z. J. (1994). New-Firm Startups, Technology, and Macroeconomic Fluctuation. *Small Business Economics*(6), 439-449.
- [3] Bates, T. (1990). Entrepreneur Human Capital Inputs and Small Business Longevity. *The Review of Economics and Statistics, LXXII*(4), 551-559.
- [4] Benavente, J. M., y Külzer, C. (2008). Creación y destrucción de empresas en Chile. *Estudios de Economía, 35*(2), 215-239.
- [5] Bhattacharjee, A., Higson, C., Holly, S., y Kattuman, P. (2009). Macroeconomic Instability and Business Exit: Determinants of Failures and Acquisitions of UK Firms. *Economica*(76), 108-131. doi:10.1111/j.1468-0335.2007.00662.x
- [6] Boeri, T., y Bellmann, L. (1995). Post-entry behaviour and the cycle: Evidence from Germany. *International Journal of Industrial Organization, 13*, 483-500.
- [7] Dunne, P., y Hughes, A. (1994). Age, size, growth and survival: UK companies in the 1980s. *The Journal of Industrial Economics, XLII*(2), 115-140.
- [8] Evans, D. S. (June de 1987). The relationship between firm growth, size and age: Estimate for 100 manufacturing industries. *The Journal of Industrial Economics, XXXV*(4), 567-581.
- [9] Fort, T. C., Haltiwanger, J., Jarmin, R. S., y Miranda, J. (2013). How Firms Respond to Business Cycles: The Role of Firm Age and Firm Size. *IMF Economic Review, 61*(3), 520-559. doi:10.1057/imfer.2013.15
- [10] Garcia-Quevedo, J., Pellegrino, G., y Vivarelli, M. (2014). RyD drivers and age: Are young firms different? *Research Policy, 1-13*. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.respol.2014.04.003
- [11] Hernandez-Trillo, F., Pagan, J. A., y Paxton, J. (2005). Start-up Capital, Microenterprises and Technical Efficiency in Mexico. *Review of Development Economics, 9*(3), 434-447.
- [12] Highfield, R., y Smiley, R. (1987). New business starts and economic activity. *International Journal of Industrial Organization, 5*, 51-66.
- [13] Holtz-Eakin, D., Joulfaian, D., y Rosen, H. S. (Feb de 1994). Sticking it Out: Entrepreneurial Survival and Liquidity Constraints. *The Journal of Political Economy, 102*(1), 53-75.
- [14] Huynh, K. P., y Petrunia, R. J. (2010). Age effects, leverage and firm growth. *Journal of Economic Dynamics y Control*(34), 1003-1013. doi:10.1016/j.jedc.2010.01.007

- [15] Ilmakunnas, P., y Topi, J. (1999). Microeconomic and Macroeconomic Influences on Entry and Exit of Firms. *Review of Industrial Organization*(15), 283-301.
- [16] INEGI. (2014). *Micro, pequeña, mediana y gran empresa: estratificación de los establecimientos*. Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, Aguascalientes.
- [17] Liu, J. (2004). Macroeconomic determinants of corporate failures: evidence from the UK. *Applied Economics*(36), 939-945. doi:10.1080/0003684042000233168
- [18] Mansfield, E. (1962). Entry, Gibrat's Law, Innovation and The Growth of Firms. *The American Economic Review*, 52(5), 1023-1051.
- [19] Mungaray, A., y Ramírez-Urquidy, M. (2011). Full and part-time entrepreneurship and the supply of entrepreneurial effort: Evidence from mexican microenterprises. *Journal of Developmental Entrepreneurship*, 16(4), 441-458. doi:10.1142/S1084946711001938
- [20] Pfaffermayr, M., Stockl, M., y Winner, H. (2013). Capital Structure, Corporate Taxation and Firm Age. *Fiscal Studies*, 34(1), 109-135.
- [21] Pfeiffer, F., y Reize, F. (2000). Business start-ups by the unemployed - an econometric analysis based on firm data. *Labour Economics*(7), 629-663.
- [22] Rangel, E., y Torre, L. E. (2015). Determinants of the cost of starting a business in Mexico. *North American Journal of Economics and Finance*(34), 430-449.
- [23] Sanchez-Vidal, J., y Martin-Ugedo, J. F. (2008). Edad y tamaño empresarial y ciclo de vida financiero. (S. Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, Ed.) Cartagena, Murcia, España.
- [24] Tornhill, S., y Amit, R. (2003). Learning about Failure: Bankruptcy, Firm Age, and the Resource-Based View. *Organization Science*, 14(5), 497-509.
- [25] Wooldridge, J. M. (2016). *Introductory Econometrics: A modern approach* (6th ed.). Boston, MA, USA: Cengage Learning.



## Sostenibilidad del gasto público: Cobertura y financiamiento de enfermedades crónicas en México

### Public Spending Sustainability: Coverage and Financing of Chronic Diseases in Mexico

Alejandra Macías Sánchez\*  
Héctor Juan Villarreal Páez\*\*

---

#### Información del artículo

Recibido:  
17 febrero 2017

Aceptado:  
21 febrero 2018

**Clasificación JEL:**  
C15; H51; J11

**Palabras clave:**

Gasto público en salud;  
Modelos de simulación;  
Enfermedades crónicas;  
Transición demográfica;  
Cambios  
Epidemiológicos;  
Sostenibilidad Fiscal

---

#### Resumen

Este artículo analiza la sostenibilidad del gasto público en salud, desde la perspectiva del costo de las principales enfermedades crónicas que padece la población mexicana, y que debe cubrir el gobierno federal. Asimismo, pretende abrir la discusión sobre la cobertura efectiva universal de salud en México, a través de una herramienta de microsimulación que permita presentar y evaluar diferentes escenarios en cuanto a su costo financiero, para poder hacer propuestas de financiamiento sostenible, principalmente porque se están enfrentando cambios demográficos y epidemiológicos que conllevan aumentos en los costos de atención médica.

---

\* School of Government and Public Transformation- Tecnológico de Monterrey. Dirección: Carlos Lazo No. 100, Colonia Santa Fe, C.P. 01389, Álvaro Obregón, México, D.F. [escueladegobierno.itesm.mx](mailto:escueladegobierno.itesm.mx). [a01120992@itesm.mx](mailto:a01120992@itesm.mx); [alejandramaci@ciep.mx](mailto:alejandramaci@ciep.mx)

\*\* School of Government and Public Transformation- Tecnológico de Monterrey. [hjvp@itesm.mx](mailto:hjvp@itesm.mx)



---

**Article information**

Received

17 February 2017

Accepted

21 February 2018

---

**JEL Classification:**

C15; H51; J11

**Keywords:**

Public health spending;

Simulation models;

Chronic diseases;

Demographic

transition.;

Epidemiological

changes; Fiscal

sustainability

---

**Abstract**

This article analyzes the sustainability of public health expenditures from the cost perspective of the principle chronic diseases that the Mexican population suffers and the Mexican Government would finance. Also, it pretends to contribute to the discussion of universal effective health coverage in Mexico by providing a micro simulation tool which would evaluate different scenarios about financial costs of universal coverage. As a result, fiscally sustainable proposals can be made based on this microsimulation tool that consider the demographic and epidemiological changes that translate into costs increases.

---

**Introducción**

El objetivo de este artículo es tratar de explicar el monto que el gobierno gasta y gastará en salud, bajo distintos escenarios, a través de un modelo de simulación basado en la atención de las enfermedades crónicas no transmisibles, que presentan en mayor medida los pobladores de México (simulador del sistema de salud), las cuales tienen un alto costo de tratamiento. El modelo de microsimulación contiene información de tres enfermedades no transmisibles: diabetes, hipertensión y depresión. Estas enfermedades se presentan con mayor frecuencia en las instituciones de salud pública. Además, se cuenta con información de diagnóstico y tratamiento de ellas a partir de la ENSANUT 2012. Cabe mencionar que en 2016, IMSS e ISSSTE gastaron en conjunto alrededor de 95 mmdp de sus presupuestos en atender diabetes, hipertensión, insuficiencia renal y cáncer cérvico uterino y de próstata. Lo anterior equivale al 31.4% del presupuesto total destinado a estas instituciones para salud. Para ambas instituciones, es consistente que la frecuencia en consultas y egresos hospitalarios se concentra en dos de las enfermedades que abordamos: diabetes e hipertensión (IMSS, 2014; ISSSTE, 2016).

El simulador de salud consiste en estimar la probabilidad de que los individuos se enfermen de acuerdo con sus características individuales y antecedentes médicos, para con ello tener el número de personas que son y podrían ser diagnosticadas, así como aquellas que reciben o recibirían tratamiento. Al tener el total de personas a tratar, es posible calcular un gasto en salud, asignando a cada individuo un costo aproximado del tratamiento a



recibir. Además, con esta herramienta se pueden plantear diversos escenarios en cuanto a la cobertura efectiva y el aumento o la disminución de costos.

El simulador que se contruye en este estudio se inserta en un simulador fiscal más completo, construido por el Centro de Investigación Económica y Presupuestaria (CIEP), el cual contiene la Ley de Ingresos de la Federación (LIF) y el Presupuesto de Egresos de la Federación (PEF), modelados para poder generar diferentes escenarios evaluativos del sistema fiscal y la sostenibilidad del mismo<sup>1</sup>.

Al modelar lo anterior, y en particular el simulador del sistema de salud, se hace posible entender la composición del gasto en la proporción correspondiente a estas tres enfermedades crónicas, y la probabilidad de que este aumente o disminuya basado en la probabilidad de que las personas contraigan diabetes, hipertensión o depresión y reciban el tratamiento correspondiente, así como por cambios en los factores de riesgo, tales como tomar, fumar u obesidad. El simulador es un primer esfuerzo que se hace en México, para la construcción de una herramienta que permite analizar el gasto en salud de diferentes esquemas de aseguramiento público, lo que genera información de distintos escenarios con el objetivo de construir un sistema universal de salud y su viabilidad financiera. Es decir, una información de atención a enfermedades determinadas y sus efectos en el presupuesto público.

Por tanto, este documento se organiza de la siguiente manera: en el siguiente apartado, se describe el sistema de salud en México; en el apartado dos, se hace una revisión de literatura sobre modelos de simulación en salud y esquemas de cobertura universal de salud en el mundo; el tercer segmento contiene la metodología que se sigue para construir el simulador de salud pública, basado en enfermedades crónicas; en el cuarto punto, se muestran los resultados de la construcción del simulador y un ejercicio aplicado de simulación; finalmente, en el apartado cinco, se emiten las conclusiones de este artículo y los pasos a seguir en la investigación.

## **1. El sistema de salud en México**

El sistema de salud en México se compone de un sector público y un sector privado, en el que el sector público es financiado por los trabajadores, los empleadores y el Estado; mientras que el privado ofrece los servicios a la población con capacidad de pago (Gómez, Sesma, Becerril, Knaul, Arreola, & Frenk, 2011). En este artículo, se abordará solamente el sector público, en

---

<sup>1</sup> CIEP.mx

el que existen diferentes instituciones que proveen de atención médica: Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE), Instituto de Seguridad Social para las Fuerzas Armadas (ISSFAM), Petróleos Mexicanos (PEMEX), Secretaría de Salud a través del Seguro Popular y las entidades proveedoras de salud en las entidades federativas.

El número de personas que están afiliadas a alguna institución de salud varía de acuerdo con la fuente de información. En 2015, los registros institucionales<sup>2</sup> indicaban que había más personas afiliadas a un servicio médico que el total de la población del país. Esto podría sugerir que existe cobertura universal en salud y que todos los mexicanos cuentan con atención médica, la mayoría, por parte de las instituciones públicas (solo 1.8% por instituciones privadas). Sin embargo, existen duplicidades en la condición de aseguramiento y una brecha entre el aseguramiento y la cobertura efectiva, la cual se refiere a la necesidad de atención de las enfermedades y la utilización por parte de los individuos de estos servicios, en tiempo y con la calidad requerida (CIEP, 2013).

Los resultados de la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición de 2012 (INSP, 2012) señalan que aproximadamente 90.2 millones de personas reciben servicios de salud por parte de instituciones públicas y privadas. El Informe General de la ENSANUT 2012 especifica que existe 21.39% de la población sin atención médica.

El análisis que la Secretaría de la Función Pública lleva a cabo con los padrones de beneficiarios y derechohabientes (SFP, 2015), arroja coberturas parecidas a las auto-reportadas en la ENSANUT 2012, con un total de 97.09 millones de personas afiliadas a las instituciones de seguridad social y al Seguro Popular<sup>3</sup>.

Para reforzar el hecho de que todavía no hay cobertura total en salud, el Consejo Nacional para la Evaluación de la Política Social (CONEVAL) reporta que el porcentaje de personas sin acceso a servicios salud se ha reducido de 29.2% en 2010 a 18.2% en 2014 (CONEVAL, 2017).

---

<sup>2</sup> Los registros institucionales se calculan a través de estimaciones con base en coeficientes familiares, los cuales se interpretan como un promedio del número de miembros por familia y se aplican al número de asegurados directos y de pensionados (IMSS, 2014).

<sup>3</sup> Los números reportados por la Secretaría de la Función Pública se refieren al número de derechohabientes y/o beneficiarios que las dependencias y entidades integran al Sistema Integral de Información de Padrones de Programas Gubernamentales (SIIPP-G).

Respecto al gasto en salud, la institución con más presupuesto, año con año, es el IMSS, seguido del Seguro Popular. De 2012 a 2014, el presupuesto asignado a la función salud del Presupuesto de Egresos había crecido en promedio 4.5% en términos reales con respecto al presupuesto del año inmediato anterior. En 2015, se observó un incremento de 1.8% solamente, y para 2016, mostró una caída de 1.2%, movimientos que indican que la política de cobertura universal en salud no ha sido prioritaria en los últimos años.

En 2015, las cifras de gasto per cápita por institución diferían drásticamente. El gasto promedio por asegurado en Seguro Popular es 20% menor que en IMSS, mientras que respecto del ISSSTE, la diferencia es 35% menos. Lo anterior, es una señal, entre muchas otras, de la calidad, tipo y nivel diferenciado de atención que cada institución provee a sus afiliados (CIEP, 2013).

En cuanto a los factores que tienen un impacto directo en el gasto en salud, se encuentra la transición demográfica, la cual en todos los países del mundo tiene varios efectos en el ingreso y gasto de los gobiernos. En este caso en particular, el cambio en la población de acuerdo con su edad se relaciona estrechamente con los servicios de salud que demandan actualmente, y demandarán en el futuro, debido a que las enfermedades se presentan en diferentes etapas de la vida y dependen también de los estilos de vida y hábitos de los individuos (factores de riesgo). En Deaton (2013), se menciona que anteriormente las enfermedades infecciosas eran las que atacaban principalmente a los niños, provocando que la esperanza de vida de la población en general fuera baja. La investigación e innovaciones en medicina han permitido que las tasas de mortalidad infantil disminuyan aun en países pobres, debido a que los descubrimientos en medicina son compartidos con todo el mundo. Así, las ganancias en esperanza de vida se han dado por esta caída en la mortalidad infantil, pero también por la atención a las enfermedades crónicas en adultos mayores, habitantes principalmente de países ricos. Efectivamente, se quiere vivir más y con mejor calidad de vida, por ello, no debe olvidarse la morbilidad, la cual se refiere a las enfermedades que padecerán la mayoría de aquellos niños que libraron la mortalidad infantil. Por tanto, el número de adultos que demandarán tratamientos por enfermedades crónicas aumentará, así como la necesidad de servicios de salud, acompañado por un mayor gasto público y privado, en este rubro (Deaton, 2013).

Las proyecciones de población del Consejo Nacional de Población (CONAPO, 2015)<sup>4</sup> indican que los 121 millones de mexicanos residiendo en el país en 2015, aumentarán a 134 millones en 2030, población que estará conformada por menos jóvenes y más personas en edad madura y vejez.

Como ya se mencionó, otro factor importante que afecta el gasto en salud es la transición epidemiológica, es decir, las enfermedades que se presentan en mayor medida entre la población, y su evolución a lo largo del tiempo. Actualmente, se observan bajas tasas de mortalidad, aumento en la esperanza de vida, caída en tasas de fecundidad y aumento de las enfermedades crónicas (INSP, 2012). En México, conforme a lo que establece el Institute for Health Metrics and Evaluation (IHME), las enfermedades o causas de muerte que predominaban en 1990 eran enfermedades del corazón, infecciones respiratorias, enfermedades diarreicas, diabetes, infarto y cirrosis. En 2010, desaparecen las enfermedades relacionada con diarrea y con infecciones respiratorias dentro de las principales causas de muerte, y aparecen enfermedades del riñón y cardíacas (IHME, 2013). Además, los informes financieros presentados en junio de 2015, tanto del IMSS como del ISSSTE, muestran que las enfermedades que presentan los derechohabientes con mayor frecuencia son enfermedades crónicas no transmisibles, como diabetes, hipertensión, enfermedades de los riñones y cáncer, entre otras.

De lo anterior, se infiere que el gasto en salud tenderá a aumentar debido a que la población, tanto por cambios demográficos, como por transición epidemiológica, presentará en mayor medida enfermedades crónicas cuyo tratamiento resulta costoso. Entre otros costos que la política de salud contempla y deberá seguir contemplando, están la salud preventiva y la atención materno-infantil. Tanto la salud como el ingreso son dos componente esenciales y complementarios del bienestar de las personas, el problema es que la elección de gastar en salud no es directa. Generalmente, las personas no están conscientes de lo que gastan en salud porque piensan que los empleadores pagan por ella, pero si las empresas tienen menos ganancias, los salarios disminuirán, afectando su nivel de bienestar. Además, los salarios han crecido de manera más lenta de lo que han crecido los costos en salud. Es un hecho que los servicios médicos de calidad permiten mantener y mejorar la salud, pero también son caros, lo que supone un cambio en prioridades relacionadas con el bienestar; es decir, para tener más salud es probable que se deje de viajar, por ejemplo. Sin embargo, Angus Deaton ha expuesto que el gasto en salud en diferentes áreas de Estados Unidos es variable y que la relación entre gasto y resultados de calidad puede ser negativa, probablemente porque hay médicos que piden más estudios y recetan más medicamentos sin que los resultados sean muy diferentes a

---

<sup>4</sup> Consultar: [www.conapo.gob.mx](http://www.conapo.gob.mx)

cuando se gasta menos. Dado lo anterior, podría pensarse que el gasto en salud se reduciría sin afectar demasiado la salud de la población (Deaton, 2013).

## **2. Revisión de literatura**

Dado que el objetivo de este artículo es construir una herramienta de microsimulación que permita evaluar la sostenibilidad del gasto en salud bajo escenarios como la cobertura universal, se hace una revisión de la literatura relacionada con lo que significa la cobertura universal en salud (efectiva o no), seguida del trabajo que se ha realizado en torno a los modelos de microsimulación.

### **2.1. Cobertura universal**

La cobertura universal en salud o atención universal es una política pública que la Organización Mundial de la Salud (OMS) y el Banco Mundial (BM) han empujado para que los países alrededor del mundo la adopten, por estar estrechamente ligada al bienestar de la población. Este concepto está establecido en la Constitución de la OMS de 1948, donde se declara que la salud es un derecho humano fundamental, así como en el artículo 4to. de la Constitución Mexicana. De acuerdo con la Organización Mundial de la Salud, la cobertura universal en salud es asegurar que las personas reciban los servicios de salud que necesitan, sin sufrir gastos catastróficos al pagar por ella (OMS, 2014).

Para que un país se jacte de haber alcanzado la cobertura universal en salud, debería cumplir con lo siguiente: (i) contar con un sistema de salud sólido, eficiente, equitativo y bien administrado que identifique y trate las necesidades de salud a través de una atención integral centrada en la persona; esto es, informar y alentar a los individuos a permanecer saludables y prevenir enfermedades, detección temprana, tener la capacidad de otorgar el tratamiento pertinente y ayudar a los pacientes en la etapa de rehabilitación. (ii) Dicho sistema debe ser financieramente sostenible, para que las personas no incurran en gastos que afecten su bienestar; lo que se puede lograr a través de diferentes esquemas que combinen proveedores de servicios de salud públicos y privados, por ejemplo. (iii) Asimismo, debe proveer de las medicinas y tecnología pertinentes para el diagnóstico y tratamiento de las enfermedades. (iv) Finalmente, debe contar con personal de salud capacitado y motivado para atender las necesidades de los pacientes (OMS, 2014).

Más que hablar solamente de cobertura, la OMS hace referencia a la cobertura efectiva y universal en salud, esto quiere decir: el beneficio real en

salud que las personas reciben por medio de las intervenciones que el sistema de salud les provee, a partir de sus necesidades específicas.

El gasto público en salud depende directamente de la cobertura de las instituciones públicas. En México, se tiene la afiliación o aseguramiento de los individuos a distintos servicios de salud pública, como son IMSS, ISSSTE, ISSFAM, PEMEX y la Secretaría de Salud a través del Seguro Popular. Actualmente, alrededor de 75% de la población se encuentra asociado a alguna de estas instituciones (Urquieta-Salomón y Villarreal-Páez, 2015). Sin embargo, es más importante considerar la cobertura efectiva, la cual incluye la necesidad de la población por los servicios de salud y la utilización de los mismos. Por ejemplo, en Urquieta-Salomón et al. (2015), se presenta evidencia sobre la brecha que existe entre la cobertura efectiva y la afiliación, principalmente en la atención a los niños, lo que representa un reto importante para poder hablar de cobertura universal.

La cobertura efectiva universal es uno de los objetivos que plantean los organismos internacionales<sup>5</sup>, argumentando que tiene un impacto directo en la salud y bienestar de la población que les permite ser más activos y productivos en sus familias y comunidades. También asegura que los niños asistan a la escuela y los adultos trabajen para ganar un ingreso. Al mismo tiempo, busca ser una protección ante el riesgo financiero de gastar grandes cantidades en atención médica, empujando así a los más pobres a mantenerse en esa situación. La cobertura efectiva universal en salud debería ser una de las principales actividades de un gobierno comprometido a mejorar el bienestar de sus habitantes (OMS, 2014).

Sin embargo, lograr la cobertura efectiva universal, bajo las características descritas, resulta una tarea complicada por varias razones. En algunos países, el sistema de salud se desarrolló para los trabajadores formales, de manera fragmentada, interviniendo distintas instituciones de salud en la provisión de los servicios de salud con numerosos paquetes de salud. A veces, estas instituciones solamente proveen de manera gratuita la atención primaria, pero no la hospitalaria, la cual es más costosa y genera otros problemas para familias que no tienen la capacidad de pago. En otros países, se desarrollaron esquemas para la población pobre, pero no para el resto, lo que genera desigualdades e inequidad en varios sentidos. Pero, una de las razones más difíciles es encontrar la mejor forma para financiar un sistema de cobertura efectiva universal en salud, asegurando el acceso, la calidad, la equidad y la eficiencia de los servicios.

---

<sup>5</sup> Banco Mundial, 2015; World Bank, 2015; OMS, 2014.

Alrededor del mundo, se han llevado a cabo esfuerzos para contar con un sistema de salud universal, como por ejemplo en Gana, Filipinas, Perú, Senegal, entre otros, los cuales han implementado diversas modalidades que no incorporan elementos de los modelos típicos de seguridad social. En general, sí es posible hablar de dos modelos de seguridad social que incluyen la provisión de servicios de salud: Bismark y Beveridge. El primero fue adoptado por Alemania en 1883; el segundo se implanta en el Reino Unido, en plena guerra mundial (1942). El modelo Bismark no pretende proveer servicios médicos a toda la población, mientras que el modelo Beveridge sí contempla tal objetivo. La manera de financiarse es diferente, el primero se hace a través de cuotas y pagos complementarios para servicios de hospitalización y farmacéutico, mientras que el segundo lo hace a través de impuestos pagados por toda la población. Otra diferencia es que en el modelo Beveridge, los sistemas de salud están integrados, lo que hace que la provisión de servicios sea uniforme; además, el personal médico lo conforman empleados públicos (PiPP, 2011).

En el caso de los países mencionados, las dimensiones que se utilizan para medir los avances en la cobertura universal son, generalmente: (i) la expansión en la cobertura, es decir, a quiénes cubre el sistema de salud; (ii) la expansión de la oferta de servicios de salud a la población o, en otras palabras, qué tipo de enfermedades y tratamientos se cubren, y (iii) la ampliación de la cobertura financiera, qué proporción de los costos estará cubierta por el estado y qué proporción por los ciudadanos. En ocasiones, se añade un componente sobre economía política que involucra el diseño institucional de cada país y su práctica organizacional, así como, otro componente sobre la igualdad y equidad de la provisión de los servicios (Lagomarsino, Garabrant, Adyas, Muga, y Otoo, 2012).

Dentro de las acciones que han llevado a cabo distintos países para aumentar la cobertura universal en salud, se encuentra el aumento del presupuesto en salud entre 5% y 11% en países como Gana, Indonesia, Ruanda y Vietnam, a pesar de contar con altas proporciones de personas que laboran en el sector informal, lo que hace más difícil cobrar impuestos y cuotas de seguridad social. Algunos países, sobre todo aquellos que destinan subsidios a poblaciones específicas (Gana, India y Filipinas), acostumbran financiar la expansión de su sistema de salud, a través de impuestos generales; mientras que otros (Kenia, Nigeria, Gana), tratan de recolectar aportaciones voluntarias de parte de los hogares. También, muchos países (Gana, Filipinas, Indonesia) se han decidido por un solo programa de salud para toda la población, en vez de tener programas o paquetes separados para distintas sub poblaciones. Asimismo, aquellos países que solo proveían servicios

hospitalarios, ampliaron su cobertura a atención preventiva y primaria, porque consideran que estos son menos costosos<sup>6</sup>. En este mismo sentido, crearon agencias independientes para comprar los servicios de salud a proveedores públicos y privados.

En cuanto a la cobertura o a quiénes cubren los sistemas de salud en los países que se han hecho cambios, se encuentra que ampliaron la cobertura llegando a 76% en Filipinas, 63% en Indonesia y 60% en Perú, pero las desigualdades persisten tanto en la calidad de los servicios como en la provisión de los mismos a distintas poblaciones (pobres, adultos mayores, niños) (Soors, Devadasan, Durairaj, y Criel, 2010). En relación con la proporción de costos de los servicios que pagan los hogares cuando realizan las acciones dirigidas a la cobertura universal, se tiene que, en la mayoría de los países que se encuentran en una etapa intermedia de reformas (más de 10 años), el gasto de bolsillo de los hogares decrece entre 3 y 6 puntos porcentuales, pero este gasto se encuentra todavía alto con respecto a lo recomendado por la OMS (15-20% del total de gasto en salud) (Lagomarsino et al., 2012).

Con el fin de tener una cobertura universal, o mejor dicho, una afiliación universal, en México, se creó en 2004 el Sistema de Protección Social en Salud (SPSS), el cual cuenta con un componente financiero principal: el Seguro Popular (SP). Este seguro público es voluntario, no depende del estatus de salud preexistente y es gratuito para los hogares ubicados en los primeros deciles de ingresos (hasta el sexto decil). Uno de los principales objetivos del SP ha sido proteger a los hogares que no cuentan con algún tipo de cobertura, ante la necesidad de incurrir en gastos de bolsillo, de modo que no haya obstáculos económicos para acceder a los servicios de salud (Ávila-Burgos, Serván-Mori, Wirtz, Sosa-Rubí, & Salinas-Rodríguez, 2013). La cobertura de la población, medida como afiliación a algún seguro médico, creció de alrededor de 60%, antes de la creación del SP, a 97% en 2015. Sin embargo, aunque la cobertura aumentó, la población padece de la misma desigualdad e inequidad en lo que a la provisión de servicios de salud respecta, tanto en calidad como en cantidad, debido a que los paquetes de salud que se proveen en el SP son diferentes a los que se proveen en las otras instituciones de salud.

---

<sup>6</sup> La evidencia de que la atención primaria y preventiva es más barata no es definitiva (Musgrove, 1987; Bray, Jemal, Torre, Forman, & Vineis, 2015; Guzmán & Vargas-Hernández, 2013), sin embargo, la práctica mundial es seguir invirtiendo en prevención y atención primaria, en parte debido a los compromisos adquiridos en Alma Ata.



En México, el gasto de bolsillo, uno de los fenómenos que se quieren abatir con la cobertura universal y, en este caso, uno de los principales objetivos del SP, se ubicaba en 58% del gasto total en 2003 (Ávila-Burgos et al., 2013), para 2015, esta proporción fue 45% (OECD, 2015). Aunque el gasto de bolsillo ha disminuido, sigue siendo el más alto de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

## **2.2. Modelos de microsimulación**

Una de las vías para modelar el gasto en salud pública es a través de modelos de microsimulación de salud. Los modelos de microsimulación permiten simular los efectos de una política en una muestra de agentes, como individuos, hogares, empresas, entre otros. Los modelos evalúan las consecuencias de un cambio en el entorno económico, producido por un cambio en la política, en un vector de indicadores de actividad o bienestar de los individuos (Bourgignon y Spadaro, 2006). En el caso de salud, se trata de simular eventos o historias individuales asociados con componentes clave de un proceso de enfermedad. Estas historias simuladas pueden analizarse de manera agregada para estimar los efectos de un tratamiento en cierta enfermedad, en nivel de población, y también comparar la efectividad de distintos tratamientos (Rutter, Zaslavsky, y Feuer, 2011). La microsimulación se ha usado con mayor frecuencia para proveer de información que permite dirigir la política pública.

Se han encontrado diversos estudios que utilizan modelos de microsimulación para estimar la incidencia de diferentes enfermedades, así como el cambio e impacto de los factores de riesgo en dicha incidencia de acuerdo con el cambio demográfico en distintos países (Manuel, y otros, 2014) (Lymer & Brown, 2012) (Pichon-Riviere, Augustovski, Bardach, Colantonio, & Group3, 2011). Sin embargo, muy pocos estudios incorporan en el modelo de microsimulación los costos de tratamiento de distintas enfermedades, dejando a un lado la posibilidad de observar qué sucede con el gasto y el financiamiento de los servicios de salud.

Asimismo, existen modelos de microsimulación que se utilizan para estimar la relación costo-efectividad de algunas intervenciones en el tratamiento de enfermedades crónicas, desarrollados principalmente en Canadá, Estados Unidos y Europa. El Population Health Model (POHEM) es un modelo de microsimulación liderado por Statistics Canada, el cual proyecta el uso de servicios de salud para atender ciertas enfermedades crónicas como cáncer de pulmón, diabetes o enfermedades cardiovasculares. Este modelo no proyecta el gasto en salud total, sino que provee de una herramienta para evaluar, a través de distintos escenarios, los impactos en salud y en el sistema de salud de nuevos tratamientos, a cambios en política pública dirigidos a abatir

ciertos factores de riesgo o incidencia en enfermedades. POHEM construye una población canadiense virtual representativa basada en individuos quienes experimentan eventos de salud como el desarrollo de una enfermedad o factores de riesgo, recepción de tratamientos o envejecimiento. Los factores de riesgo se modelan de manera explícita (cambios en comportamiento de fumadores, obesidad, hipertensión, etc). Es un modelo de microsimulación dinámica en tiempo continuo, basado en un proceso de Montecarlo en donde la ocurrencia de eventos es aleatoria y los efectos en los individuos presentan diferencias. De las variables incorporadas al modelo para calcular el gasto en salud, se encuentran la dinámica poblacional, la distribución de los factores de riesgo, la incidencia e intensidad de las enfermedades, el uso de diagnósticos y terapias, y el costo de tratamientos. Finalmente, las fuentes de información utilizadas para el POHEM son encuestas de salud representativas en el nivel nacional, bases de datos de hospitalización, censos y bases de datos de costos de salud, así como parámetros determinados en la literatura (Statistics Canada, 2015).

Otro modelo es aquel desarrollado por la Universidad de Carolina del Sur y RAND, entre otros, en Estados Unidos, cuyo nombre es Future Elderly Model (FEM). FEM proyecta el total de gastos (Medicare, Medicaid, medicinas, etc) de la población de 51 años y más considerando el cambio demográfico, el estatus de salud y las tendencias en discapacidad. Entonces, simula y evalúa posibles cambios en las tendencias de salud debido a cambios en el sistema de salud, en el estatus de salud de los adultos mayores, innovaciones médicas, disminución en las enfermedades crónicas o en la cantidad de adultos con obesidad. La población del modelo se obtiene de la encuesta de beneficiarios de Medicare y cuenta con tres sub-modelos principales: (i) Modelo para las transiciones de estatus de salud (mortalidad, cáncer, enfermedades cardiovasculares, diabetes, entre otras). (ii) Modelo que predice las características de salud que cambian año con año, asegurando que la población de 51 años o más permanece representativa; si se usa la prevalencia de enfermedades por edad y la trayectoria de enfermedades es posible predecir el estatus de salud de las siguientes generaciones. (iii) Modelo de mínimos cuadrados ordinarios para costos de salud que incorpora información sobre factores de riesgo y la presencia de enfermedades crónicas; asimismo, las variables que influyen en el gasto de salud, son: la dinámica poblacional, la distribución de los factores de riesgo, las enfermedades crónicas y el costo anual de los tratamientos (USC, 2011).

En el Reino Unido, se desarrolló el modelo National Heart Forum Microsimulation Model (NHFM) para proyectar el gasto en salud de las principales enfermedades derivadas de la obesidad simulando el cambio en las tendencias de la prevalencia de estas enfermedades, debido a políticas dirigidas a reducir la obesidad en la población. El modelo se construye sobre

una población inglesa virtual y representativa, que nace en la simulación, experimenta eventos de salud como el desarrollo de factores de riesgo y enfermedades y muere. El modelo se desarrolla en tres pasos: (i) análisis de regresión para estimar la distribución de los factores de riesgo en la población futura; (ii) modelo de microsimulación que proyecta la carga de enfermedades asociadas a los factores de riesgo estimados y (iii) cálculo posterior para obtener los gastos asociados a la carga de enfermedades basado en el costo promedio por paciente por enfermedad del Sistema Nacional de Salud Inglés (Wang, McPherson, Marsh, Gortmaker, y Brown, 2011). De igual manera que los modelos anteriores, las variables clave que se relacionan con el gasto en salud, son: la dinámica poblacional, el índice de masa corporal, la prevalencia de enfermedades relacionadas con obesidad y el costo anual de cada enfermedad; datos tomados de la literatura y de los datos nacionales.

El gasto social en América Latina ha crecido significativamente de 2005 a 2010 de \$461 dólares per cápita a \$1,026 (122%). De 11.2% a 18.6% del PIB (salud, educación y protección social) (Glassman y Zoloa, 2014). Este crecimiento se ha dado por diferentes razones, las cuales se pueden clasificar en aquellas que son inerciales y aquellas que se relacionan con el diseño de las políticas públicas. Las primeras son estructurales, como el envejecimiento de la población, urbanización, disponibilidad de tecnología para desarrollar medicina avanzada y el acceso a nuevas drogas. Las segundas están relacionadas con la política pública, como decidir las intervenciones, poblaciones objetivo y subsidios. Para poder estimar cuánto cuesta proveer de servicios de salud a la población ahora y en el futuro, Glassman y Zoloa (2014) desarrollaron un modelo de microsimulación que incorpora información sobre tendencias en la población, factores de riesgo, características socioeconómicas y crecimiento tecnológico en Brasil, Chile y México. Estos autores definen el gasto en salud como la suma de los gastos relacionados con la salud de los individuos de una población, tomando en cuenta la probabilidad de que un individuo se enferme y sea tratado por esa enfermedad.

### 3. Metodología

Este estudio propone modelar una herramienta de microsimulación que incorpore un análisis tanto de perfiles epidemiológicos y demográficos de la población, como el costo de las enfermedades y el gasto público en salud relacionado. Para ello, se seguirá la metodología planteada en (Glassman y Zoloa, 2014). Se define el gasto en salud, de la siguiente manera:

$$\text{Gasto}_t^e = \sum_f^F \sum_i^N P_i^f (x_i^e \beta_{t0}^f) * P_i^{Tf} (T_i^e \delta_{t0}^f) * CE_{t0}^f$$

donde  $P_i^f(x_i^e \beta_{t0}^f)$  es la probabilidad de que el individuo  $i$  contraiga la enfermedad  $f$ , la cual depende de las características del individuo y los coeficientes obtenidos a través de un modelo probit en  $t_0$ ;  $P_i^{Tf}(T_i^e \beta_{t0}^f)$  es la probabilidad de que un individuo  $i$  con la enfermedad  $f$  sea tratado;  $CE_{t0}^f$  se refiere al costo promedio del tratamiento en  $t_0$ .

Por tanto, el gasto en salud es la sumatoria del costo de las enfermedades multiplicado por la probabilidad de que un individuo se enferme y sea tratado en un escenario específico ( $e$ ) y tiempo específico ( $t$ ).

Las probabilidades de enfermarse de cierta enfermedad y de ser tratado se estimarán por edades y sexo, así será posible obtener estas mismas probabilidades para los años subsecuentes con base en las proyecciones demográficas de CONAPO.

Las probabilidades de enfermedad y tratamiento se estimarán a través de modelos de regresión probit, de los cuales es posible obtener los coeficientes que explican la ocurrencia de un evento, a partir de características del individuo y del entorno.

$$\begin{aligned} \text{Enfermarse}_{i,f} &= \alpha_{i,f} + \beta_{i,f}x_i + \varepsilon \\ \text{Tratamiento}_{i,Tf} &= \gamma_{i,Tf} + \delta_{i,Tf}T_i + \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto, contraer o no la enfermedad  $f$  dependerá de distintas características del individuo y el entorno ( $x_i$ ), como: edad, sexo, estado civil, escolaridad, si el individuo es indígena, si trabaja, antecedentes de la enfermedad en padre y madre, si radica en zonas rurales, factores de riesgo (fuma, toma o padece obesidad).

Asimismo, recibir tratamiento para curar la enfermedad  $f$  depende de características del individuo y del tratamiento ( $T_i$ ), tales como edad, escolaridad, institución proveedora de servicios médicos (afiliación) e ingreso, condicionado a haber sido diagnosticado con la enfermedad.

Adicionalmente, se estimaron ecuaciones para obtener la distribución probabilidad de que una persona fume, tome o padezca de obesidad, igualmente, por medio de modelos probit. En estos modelos, las variables independientes, son: edad, sexo, estado civil, escolaridad, si el individuo es indígena, si trabaja, si radica en zonas rurales y si fuma o toma. Estos modelos se incorporan para poder hacer simulaciones con escenarios donde la proporción de individuos que fuma o toma, aumenta o disminuye por la intervención de alguna política pública.

Cabe mencionar que los modelos se corrieron por sexo, es decir, se calcula la probabilidad de enfermarse y de ser tratados para cada una de las enfermedades, para mujeres y hombres por separado.

#### **4. Datos**

La Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (INSP, 2012) se levantó en el año 2012 con el propósito de cuantificar la frecuencia, distribución y tendencias de las condiciones de salud y nutrición, así como sus determinantes. También contiene información sobre la cobertura de protección en salud de los individuos, la utilización y condiciones de vida de acuerdo con los diferentes servicios de salud que existen en nuestro país. Esta encuesta se ha llevado a cabo en 2006 y 2012.

Para este trabajo en específico, se utiliza la ENSANUT 2012, porque contiene información sobre algunas de las enfermedades que la población presenta en mayor medida, como lo son: diabetes mellitus, depresión, hipertensión arterial, enfermedades cardiovasculares, hipercolesterolemia y enfermedades neurovasculares. Estas enfermedades coinciden con las 10 principales enfermedades que reporta atender el IMSS, en el Informe al Ejecutivo Federal y al Congreso de la Unión, sobre la situación financiera y los Riesgos del Instituto (IMSS, 2014). De igual forma, es posible contar con información relacionada con el tratamiento de las enfermedades mencionadas anteriormente: si recibió el tratamiento, qué tipo de tratamiento y qué institución se lo brindó. En algunos casos, se conoce la razón por la que el individuo no recibió el tratamiento. Por otro lado, la encuesta también contiene información sobre factores de riesgo como obesidad y si los individuos fuman o toman, entre otros factores. Por tanto, se utilizó el módulo de hogares, individuos y adultos, el cual contiene la información sobre el padecimiento de enfermedades crónicas y su tratamiento para 46,277 registros de individuos mayores de 20 años. La ENSANUT 2012 es una encuesta probabilística que permite ofrecer resultados representativos para cada una de las entidades del país, para los ámbitos urbano y rural, y para el país en su conjunto (INSP, 2012).

El cuadro 1 muestra que 9.1% de la población mayor a 20 años está diagnosticada como diabética y de ellos, 85.5% recibe tratamiento, independientemente de la institución proveedora. 15.9% de los adultos son hipertensos y solamente 67.7% es atendido para controlar esta enfermedad, mientras que del 10% de personas que sufren de depresión, 65.5% recibe tratamiento.

Sobre los factores de riesgo, aproximadamente 22.5% de la población mayor a 20 años presentan obesidad, 36.5% fuma y 41.7% toma alcohol.

**Cuadro 1**  
**Proporción de enfermos, tratados y factores de riesgo. Statu Quo**

	<b>Proporción de Enfermos (%)</b>	<b>Proporción de enfermos con tratamiento (%)</b>
Diabetes	9.17	85.53
Hipertensión	15.92	67.73
Depresión	10.72	65.54
<b>Factores de riesgo</b>		
Obesidad		22.48
Fuma		36.45
Toma		41.75

Fuente: Elaboración propia con datos de la ENSANUT 2012 (INSP, 2012)

Otra posible fuente de información sería la Encuesta de Ingreso y Gasto de los Hogares (ENIGH), la cual también levanta información sobre salud. Sin embargo, esta se refiere solamente a la afiliación y algunas preguntas sobre control de peso, y detección de diabetes o presión alta sin incluir si la enfermedad fue diagnosticada o si ha sido tratada por alguna de las instituciones que brindan servicios de salud pública en el país.

Una forma de estimar el costo o gasto público por individuo es tomando el gasto total asignado a cada una de la instituciones de salud y dividirlo entre el número de afiliados que cada una de ellas tiene. Sin embargo, esta medida no toma en cuenta el número de personas que necesitan servicios médicos, que se enferman y que se atienden. Por tanto, es necesario calcular el costo promedio por enfermedad, es decir, cuánto cuesta atender a una persona que padece diabetes, por ejemplo, en promedio. Para lograr lo anterior, se parte de los Grupos Relacionados con el Diagnóstico (GRD), ejercicio que clasifican casos por tipo de diagnóstico (primario y secundario), características del paciente (sexo, edad), presencia de morbilidad y complicaciones, y procedimientos aplicados. Los casos clasificados bajo el mismo GRD se caracterizan por ser homogéneos, por tanto, son económica y médicamente similares. Las dos características básicas de un sistema de pago basado en GRD son: a) un sistema de clasificación detallado del paciente y b) una fórmula de pago que se basa en el peso relativo de los distintos grupos (Paolillo et al., 2008). Los GRD utilizados para esta investigación fueron elaborados por el IMSS y se toman en cuenta el costo promedio de la diabetes y la hipertensión con y sin complicaciones, así como de la neurosis depresiva. Los costos unitarios por enfermedad resultantes de la metodología

GRD incluyen los recursos utilizados en atención hospitalaria: medicamentos, material de curación, laboratorio de patología, gabinete, banco de sangre, bienes de inversión y consumibles médicos. Por tanto, los costos utilizados en este artículo no contemplan los costos de la atención ambulatoria (IMSS, 2012).

En definitiva, el tema sobre el costo de las enfermedades es un tema de investigación en sí mismo. En este trabajo, se toman los costos de GRD como referencia.

**Cuadro 2**  
**Costos promedio por año de tratamiento de enfermedades crónicas en 2015**

<b>Enfermedad</b>	<b>Costo promedio (pesos de 2015)</b>
Diabetes (con y sin complicaciones)	45,300
Hipertensión (con y sin complicaciones)	45,700
Depresión	61,205

Fuente: IMSS (2008) en pesos de 2015

Existen estudios en los que se estipula que los costos de estas enfermedades se encuentran alrededor de los promedios que se muestran en el cuadro 2. Por ejemplo, en Villareal-Ríos y otros (2011), se establece que el costo promedio de la hipertensión y la diabetes se ubicaba en US\$5,862 y US\$ 2,548 dólares, respectivamente. Asimismo, en Bolaños, Shigematsu, Ruíz, Márquez y Ávila (2010), se señala que el costo promedio anual por paciente fue de US\$3,193.75, correspondiendo US\$2,740.34 para el paciente sin complicaciones y US\$3,550.17 para el paciente con complicaciones. Los días/cama en hospitalización y en unidad de cuidados intensivos fueron los servicios con mayor costo. Los costos en otros países parecen ser más altos, como lo muestra la American Diabetes Association, quien indica que el tratamiento de diabetes es alrededor de USD\$5,900.

Finalmente, el gasto público se obtiene del Presupuesto de Egresos de la Federación (PEF) 2015. El PEF contiene los recursos aprobados por poder legislativo para que el poder ejecutivo pueda operar las políticas públicas correspondientes, entre ellas, la provisión de servicios de salud.

Debido a que los datos son de distintos años, los costos se convierten a valores de 2015, para ser congruentes con los datos del PEF. En cuanto a la

información de la ENSANUT, se asume que la proporción de personas mayores de 20 años, que son diagnosticadas con alguna de las enfermedades en estudio, se mantiene constante en los siguientes tres años<sup>7</sup>.

## 5. Resultados

Los resultados de las regresiones, para estimar la probabilidad de ser diagnosticado por una de las tres enfermedades crónicas incluidas en este análisis, se muestran en las gráficas 1 a 3. Cada una de las gráficas presenta la relación que existe entre las variables independientes y la probabilidad de que un individuo tenga diabetes, hipertensión o depresión, para hombres y para mujeres de manera independiente. Las variables independientes incluidas en las regresiones son: edad, edad al cuadrado, si el individuo está casado, si es indígena, los años de escolaridad, si tiene un trabajo, si consume (toma) alcohol, si fuma, si habita en zonas rurales, si padece de obesidad, así como, los antecedentes médicos familiares para las enfermedades con tal información.

Asimismo, se presentan las estimaciones de la probabilidad de que las personas diagnosticadas con alguna de las enfermedades crónicas estudiadas reciban tratamiento (gráfica 4). En este caso, las regresiones incluyen información sobre edad, institución proveedora de servicios de salud o afiliación y el ingreso de los individuos.

Por otro lado, se estima la presencia de factores de riesgo como son tomar alcohol, fumar y la obesidad, la cual, aunque no se considera como una enfermedad, también es un factor de riesgo, ya que contribuye al desarrollo de enfermedades crónicas como las estudiadas en este documento (gráficas 5 y 6).

Todas las interacciones de los modelos estimados en esta sección son significativas al nivel de 95% de confianza. Los resultados de los probit se pueden consultar en el apéndice 1.

Las gráficas se interpretan de la siguiente manera: los puntos por arriba de la línea del cero indican que esa variable se relaciona positivamente con la probabilidad de tener diabetes (fumar, tomar, etc.). Por ejemplo, en la gráfica 1, la edad, tanto para hombres como para mujeres, incrementa la probabilidad de contraer diabetes. Por otro lado, los puntos por debajo de la línea de cero,

---

<sup>7</sup> De hecho en la ENSANUT 2016, la proporción de enfermos de diabetes e hipertensión no son significativamente diferentes a la proporción de enfermos de diabetes e hipertensión de la ENSANUT 2012 (OMENT, 2016).

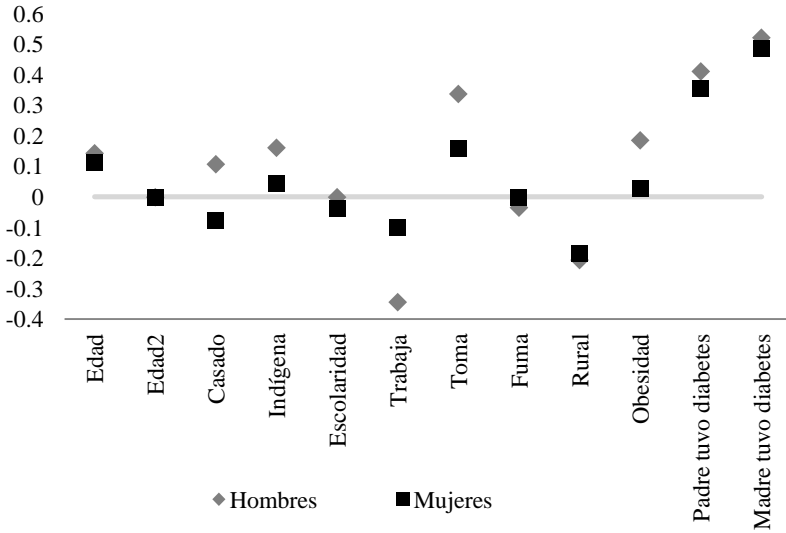


con signo negativo, indican que esa variable se relaciona negativamente con la probabilidad de tener diabetes (fumar, tomar, etc.). Por ejemplo, la escolaridad tiende a disminuir la probabilidad de presentar la enfermedad o factor de riesgo. Aunque en las gráficas existen datos sobre la línea del cero, que indicarían que el parámetro es igual a cero, éstos son muy pequeños, pero significativos.

En el caso de la diabetes, los factores que inciden positivamente en la probabilidad de que se desarrolle esta enfermedad son la edad, el ser indígena, el consumo de alcohol, la obesidad y el que los padres hayan sido diabéticos también, tanto para hombres como para mujeres. Aunque se debe resaltar que en los hombres, la edad tiene un efecto mayor que en las mujeres (1.3 veces), así como la educación, la cual disminuye 42 veces más la probabilidad de que las mujeres sean diagnosticadas con diabetes, comparado con los hombres (coeficiente para hombres 0.0008; coeficiente para mujeres 0.036). Es decir, es menos probable que las mujeres con más años de escolaridad tengan esta enfermedad. La obesidad también afecta en mayor medida a los hombres. El estar casado tiene un efecto diferenciado por sexo, es positivo para hombres, pero negativo para mujeres. De acuerdo con el modelo desarrollado, la probabilidad de que un hombre mayor de 20 años sea diagnosticado con diabetes es 9.09%, la misma medición para mujeres es 10.4%.

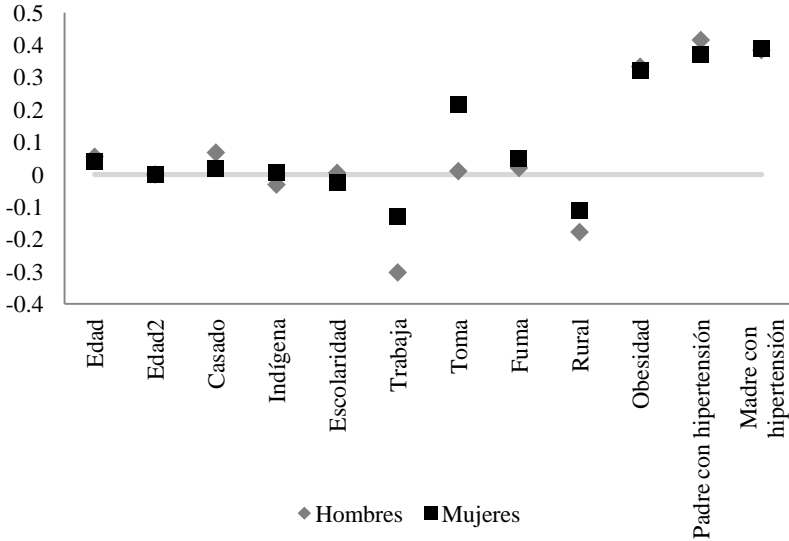
Para la hipertensión, la edad, estar casado, tomar, fumar, la obesidad y si los padres padecieron de presión alta son determinantes que aumentan la probabilidad de ser hipertenso. También se encuentran efectos diferenciados por sexo, en cuanto a ser indígena y los años de escolaridad. En este caso, la probabilidad de presentar hipertensión disminuye para las mujeres mejor educadas, pero para los hombres, esta característica aumenta la probabilidad. De igual manera, un hombre indígena tiene menos probabilidad de padecer hipertensión en comparación con una mujer indígena. Tener un trabajo decrece 2.35 veces más la probabilidad de padecer hipertensión en comparación con una mujer. En cuanto a los efectos de los factores de riesgo, estos son más severos para las mujeres que para los hombres. La probabilidad de sufrir hipertensión para un hombre mayor a 20 años es 13.6%, pero para las mujeres es 19.8%.

**Gráfica 1**  
**Probabilidad de tener diabetes**



Fuente: Elaboración propia con datos de la ENSANUT 2012 (INSP, 2012)

**Gráfica 2**  
**Probabilidad de tener hipertensión**



Fuente: Elaboración propia con datos de la ENSANUT 2012 (INSP, 2012)

En cuanto a la depresión, enfermedad que se incluyó por su creciente incidencia y porque existe información relevante en la ENSANUT 2012. Las variables que tienen relación positiva con la probabilidad de tener depresión son la edad, los factores de riesgo (fumar y tomar) y la presencia de enfermedades crónicas. La obesidad, y el ser indígena tienen efectos diferentes para hombres que para mujeres. En el primer caso, es más probable que las mujeres desarrollen depresión, a que los hombres con obesidad la desarrollen. En el segundo caso, los hombres indígenas son más propensos a la depresión que las mujeres indígenas. A diferencia de la diabetes y la depresión, es más probable que las mujeres presenten depresión conforme se hacen mayores, comparado con los hombres. De igual manera, la escolaridad disminuye 13.7 veces más la probabilidad de deprimirse para mujeres que para hombres, mientras que el trabajo tiene efectos de mayor magnitud en la reducción de la probabilidad para hombres. Esta medida se ubica en 5% para hombres y 14% para mujeres.

Para la probabilidad de ser diagnosticado con diabetes, hipertensión y depresión, tener un trabajo y vivir en zonas rurales se relacionan negativamente, es decir, disminuyen estas probabilidades para hombres y mujeres.

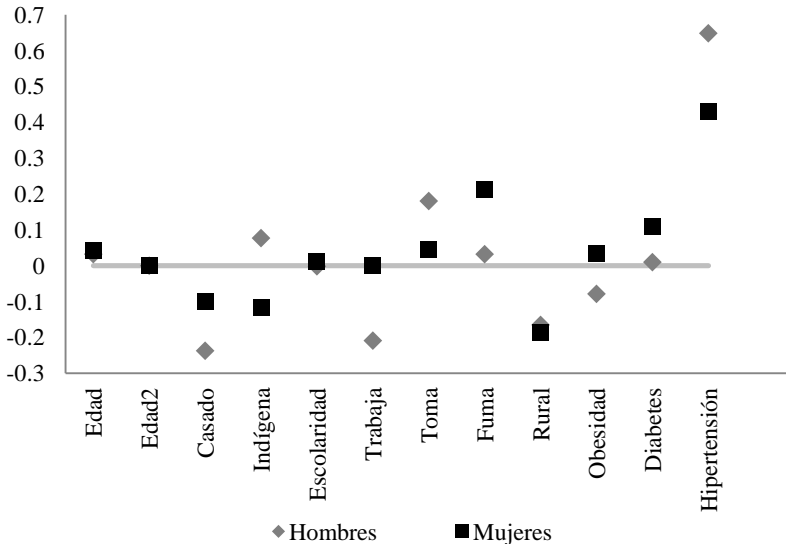
La estimación de las probabilidades de recibir tratamiento si una persona es diagnosticada como diabética o hipertensa se presenta en la gráfica 4. En estos modelos, se incluyen como variables independientes la edad, la edad al cuadrado, la escolaridad, la institución proveedora de servicios médicos a la que el individuo está afiliado y el ingreso del hogar. En general, se observa que es más probable que las mujeres reciban tratamiento para diabetes que los hombres, a través de las instituciones de salud, mientras que el tratamiento de hipertensión es más probable que lo reciban los hombres. La afiliación a PEMEX o ISSSFAM aumenta más de 2 veces la probabilidad de recibir tratamiento para diabetes, así como para recibir tratamiento para la hipertensión, para ambos sexos, comparado con la atención de estas enfermedades en el IMSS o ISSTE. La probabilidad de recibir tratamiento se reduce si están afiliados a IMSS-opportunidades, en especial para hombres diabéticos y para mujeres con presión alta.

La probabilidad de recibir tratamiento para ambas enfermedades aumenta con la edad de los individuos y con el ingreso de los hogares, es decir, entre mayor es el ingreso es más probable que las personas que padecen diabetes o hipertensión busquen atención médica.

Cabe mencionar que este análisis puede presentar problemas de endogeneidad, dado que el diagnóstico y tratamiento de la diabetes depende de la disponibilidad y asistencia de las personas a acudir a una de las

instituciones de salud. Además, la probabilidad de tratamiento aumenta en instituciones que proveen servicios de salud a trabajadores del sector formal.

**Gráfica 3**  
**Probabilidad de tener depresión**

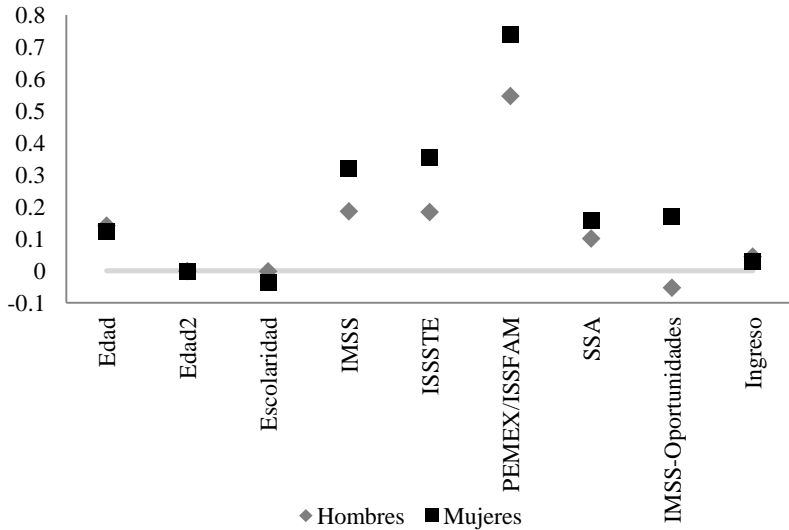


Fuente: Elaboración propia con datos de la ENSANUT 2012 (INSP, 2012)

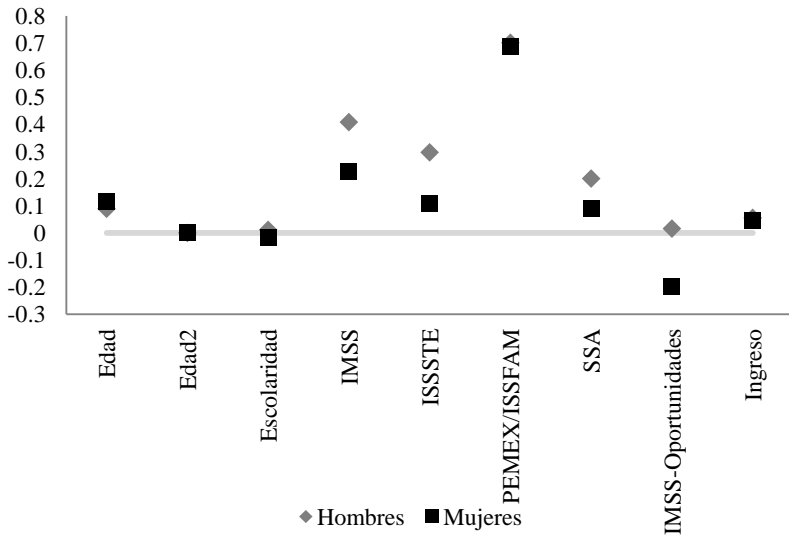
Con respecto a los factores de riesgo: consumo de alcohol y tabaco, los resultados se presentan en la gráfica 5. Lo que se puede concluir es que fumar tiene un efecto positivo en la probabilidad de consumir alcohol y viceversa, mientras que tener trabajo también aumenta la probabilidad de tener estos comportamientos que se definen como factores de riesgo. Estas ecuaciones se calculan para poder distribuir la probabilidad de ocurrencia de los factores de riesgo en la población mayor de 20 años, para que, con ello, sea posible hacer cambios que generen diferentes escenarios a evaluar.

Finalmente, y de la misma manera que la estimación de la probabilidad de presentar alguna enfermedad, se calcula la probabilidad de presentar obesidad como factor de riesgo. Por tanto, la probabilidad de tener un índice de masa corporal alto aumenta con la edad, con el consumo de alcohol y tabaco, así como con la presencia de otras enfermedades crónicas. Cabe mencionar que tener un trabajo disminuye la probabilidad de presentar obesidad.

**Gráfica 4**  
**Probabilidad de recibir tratamiento para diabetes e hipertensión.**  
**a) Diabetes**

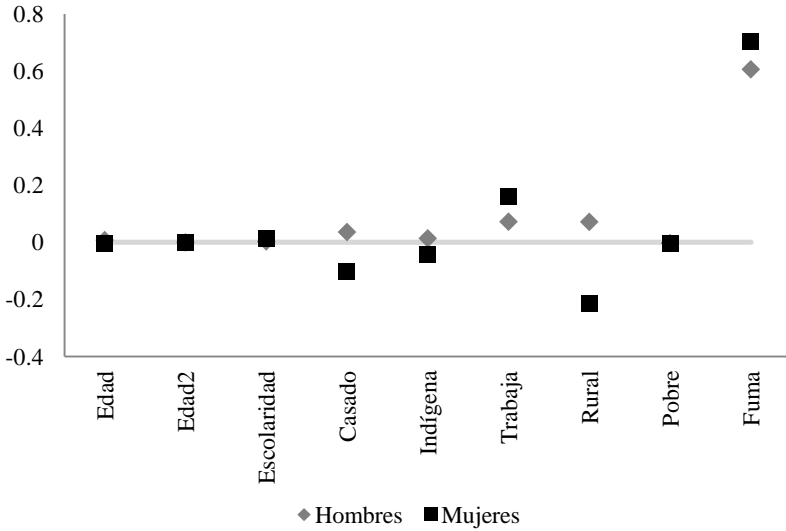


**b) Hipertensión**

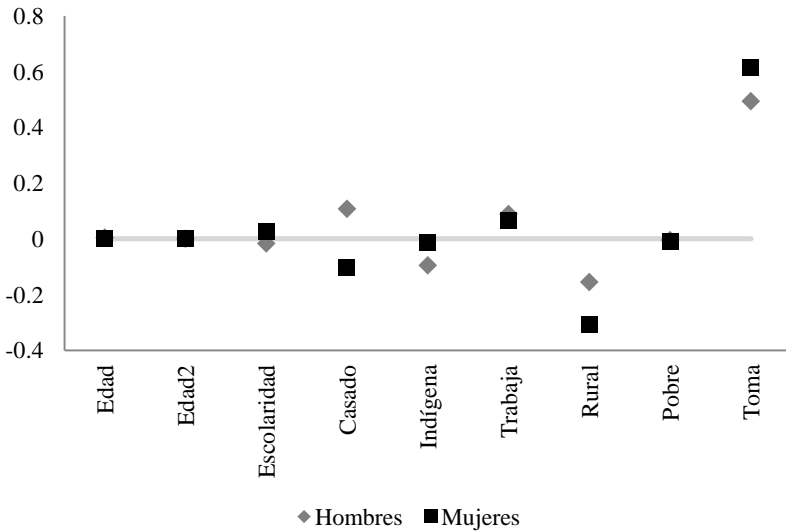


Fuente: Elaboración propia con datos de la ENSANUT 2012 (INSP, 2012)

**Gráfica 5**  
**Probabilidad de factores de riesgo**  
**a) Tomar**

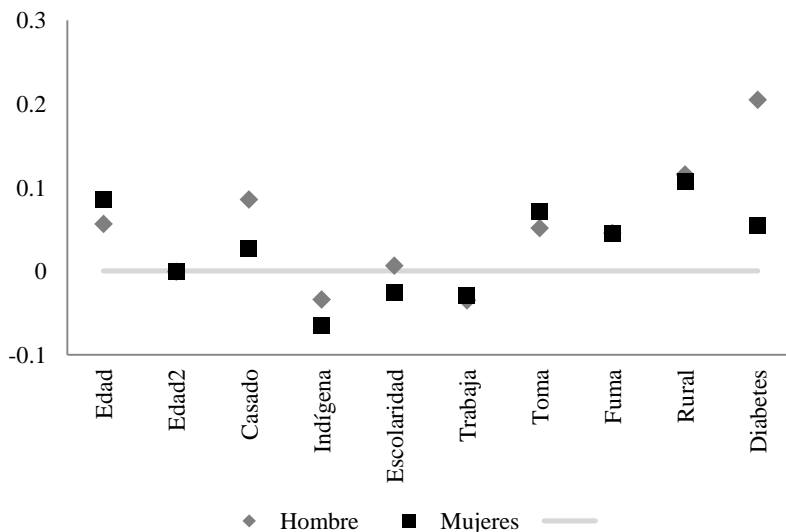


**b) Fumar**



Fuente: Elaboración propia con datos de la ENSANUT 2012 (INSP, 2012)

**Gráfica 6**  
**Probabilidad de tener obesidad**



Fuente: Elaboración propia con datos de la ENSANUT 2012 (INSP, 2012)

Los efectos de los años de escolaridad en la probabilidad de que los individuos presenten una enfermedad crónica son, aunque significativos, muy pequeños y en su mayoría negativos, pero como ya se mencionó, son diferenciados para hombres y mujeres.

### 5.1 Statu Quo

Con la información de la ENSANUT 2012 del cuadro 1, y con los resultados de los modelos descritos en la sección anterior, se establece el punto de partida para llevar a cabo simulaciones.

Estos parámetros son los que pueden ajustarse para las simulaciones, es decir, podríamos jugar con escenarios donde el porcentaje de adultos obesos cae por alguna política pública, y observar cómo cambia el gasto en salud debido a esta disminución, o asumir que existe la cobertura universal y que todos los enfermos de estas tres enfermedades serán atendidos, ¿cuánto costaría?

### 5.2. Gasto público en salud

A partir de los resultados de los modelos de probabilidad de enfermedad, tratamiento y el costo promedio de las enfermedades, así como la definición del statu quo, se obtiene el gasto público en el que incurre el gobierno a

través de las instituciones que proveen servicios de salud para 2015. Esto es 17,900 mdp para diabetes; 52,600 mdp para hipertensión y; 13,000 mdp para depresión. En total, suman 83,500 millones de pesos, lo que representa alrededor del 17% del presupuesto asignado a la función salud del Presupuesto de Egresos de la Federación en 2015 (SHCP, 2014) y 22.3% de la subfunción “Prestación de Servicios de Salud a la Persona”, la cual incluye la atención de las enfermedades crónicas.

### 5.3. Ejercicio de simulación

Al contar con un punto de partida y los parámetros que podríamos modificar ante distintos escenarios, lo que se propone en este apartado es realizar una simulación donde todos los adultos que hayan sido diagnosticados con una de las tres enfermedades analizadas en este estudio recibieran tratamiento, es decir, que el 9.1% de diabéticos, 15.9% de hipertensos y 10.7% de depresivos fueran atendidos con consultas, medicinas y cualquier servicios médico que necesiten por parte de las instituciones de salud pública, suponiendo que se quisiera alcanzar una cobertura universal en salud proveída por el Estado. Lo anterior supondría un aumento en el gasto público, pero, ¿de cuánto? El resultado de los cálculos arroja que el gasto en diabetes aumentaría 10.6%, el gasto en hipertensión 28% y 37% el gasto en depresión. En total, el presupuesto para solamente atender estas enfermedades debería aumentar 26%, mientras que el gasto total de la función salud debería tener un incremento de 4.1%, solamente en 2015. Sin embargo, lo que realmente ha pasado con el presupuesto destinado a salud desde 2013 es que presenta una tendencia a disminuir, en vez de aumentar (gráfica 7).

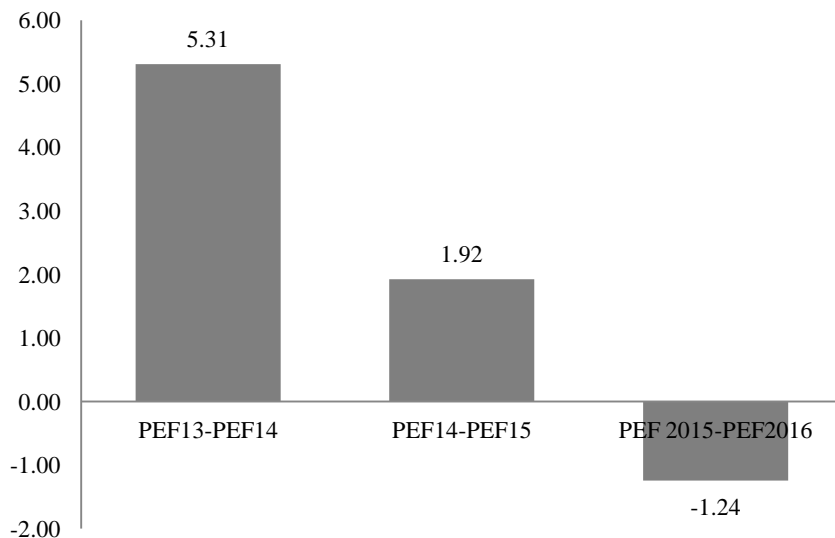
Ahora, supongamos que las políticas públicas de prevención a la obesidad dieran resultado y la proporción de población adulta con sobrepeso y obesidad caiga cinco puntos porcentuales (de 22% a 17%). El resultado sería una caída en la proporción de hipertensos en un punto porcentual de 15.9 a 14.8%, lo que conllevaría una reducción del gasto en hipertensión, atendiendo al 67.7% de los hipertensos (INSP, 2012); el gasto total en salud disminuiría 2.6%.

### 6. Limitaciones en la metodología

Este trabajo no está exento de limitaciones metodológicas, que no han sido incorporadas porque cada una de ellas es un tema de investigación en sí mismo, y realizarlo nos alejaba del objetivo principal: la construcción de un modelo de microsimulación para evaluar distintos escenarios. En esta sección detallaremos algunos de esto temas:



**Gráfica 7**  
**Variación real (%) del presupuesto destinado a salud 2013-2016**



Fuente: Elaboración propia.

El primero se refiere a la disponibilidad de información sobre el diagnóstico y tratamiento de enfermedades crónicas o no transmisibles, así como su costo. Este trabajo se basó en información pública disponible, pero hace falta que las instituciones públicas sean más transparentes y constantes con respecto a la información que producen.

En segundo lugar, hablar de sostenibilidad a partir de tres enfermedades resulta corto, sin embargo, estas tres enfermedades son las que presentan mayor número de derechohabientes en IMSS e ISSSTE (más de 12 millones con diabetes y 12 millones con hipertensión). De hecho, la incidencia de diabetes ha crecido en 140% del año 2000 al año 2015, mientras que la hipertensión lo hizo en 92% (IMSS, 2015). Un modelo integral no solo debería incorporar enfermedades crónicas, sino también las iniciativas preventivas y las enfermedades transmisibles, pero cada intervención presenta sus propias complicaciones.

El tercero es que este tipo de análisis tiene cierto grado de endogeneidad, como ya se mencionó anteriormente, dado que el diagnóstico y tratamiento de la diabetes depende de la disponibilidad y asistencia de las personas a acudir a una de las instituciones de salud, en otras palabras, es difícil saber si las personas que trabajan son las más sanas, o si debido a que trabajan, entonces, la probabilidad de enfermarse es menor.

En cuarta instancia, el aumento en la cobertura no va acompañado de calidad en la provisión de servicios, de hecho, en este estudio se asume que todo lo demás permanece constante. Los costos no cambian, lo que indica que no existe cambio tecnológico, ni en la provisión de servicios, ni en la infraestructura. El análisis tampoco incorpora el alza en otro tipo de costos relacionados con el aumento en la cobertura. Aún con las limitaciones mencionadas, el análisis de este artículo es relevante por la metodología utilizada para generar el modelo de microsimulación, la cual es flexible y permite generar distintos escenarios. Además, muestra que la detección y el tratamiento de enfermedades crónicas aquí estudiadas es limitado por parte de las instituciones públicas, y que al aumentar la cobertura del tratamiento de todas las personas diagnosticadas con estas tres enfermedades, *ceteris paribus*, el gasto en salud sería poco sostenible.

## Conclusiones

Este artículo abre el debate para discutir sobre la cobertura efectiva y la cobertura universal en México, así como, para proveer de una herramienta de microsimulación que permita evaluar diferentes escenarios en cuanto a su costo financiero y poder hacer propuestas que descansen en metodologías rigurosas, de financiamiento sostenible principalmente, dado que se avencinan cambios demográficos y epidemiológicos que seguramente harán que los costos en salud se eleven, mientras que el presupuesto destinado a atender a la población disminuye.

Para alcanzar la cobertura efectiva universal en salud, deben realizarse cambios sobre la forma en la que actualmente se distribuyen los servicios de salud a la población. Dichos cambios deberán ir acompañados por el presupuesto correspondiente; sin embargo, saber a cuánto ascienden los gastos para atender a la población según sus necesidades de salud resulta complejo, debido a que los ciudadanos no planean cómo, ni cuándo enfermarse. Para ello, se construye un modelos de microsimulación basado en la probabilidad de que las personas se enfermen y reciban tratamiento por esa enfermedad, a fi de que junto con el costo promedio de tratamiento de tal enfermedad, se estime el gasto en el que se puede incurrir en distintos escenarios encaminados a proveer salud a toda la población.

Los resultados del modelaje del gasto público en salud arrojan que, en 2015, no se atendía al total de la población que presentaba enfermedades crónicas, como diabetes e hipertensión. El gasto asociado a este nivel de atención fue de 83,500 mdp, lo que representa el 17% del presupuesto total asignado a la función salud. Al hacer un ejercicio para cubrir al 100% de los enfermos, quienes podríamos decir que son los adultos que necesitan de un tratamiento,

el gasto total de la función salud debería aumentar 4.1%. Lo anterior para el caso que se pretenda cubrir a toda la población con recursos públicos.

La cobertura efectiva universal puede construirse con un sistema único o fragmentado y, aunque un sistema único supone ser más eficiente, en el caso de México, también implica incurrir en costos políticos, por la existencia de sindicatos que probablemente se opondrían, pero también en costos referentes a los recursos, así como en la definición de paquetes únicos de salud para toda la población. Asimismo, determinar cuánto cuesta llegar a la meta universal es indispensable para saber cómo podría financiarse, si por impuestos generales o por aumentos en las cuotas de los afiliados, aunque debido a la gran proporción de la población que se encuentra en la informalidad, el cobro de cuotas se hace aún más complejo y costoso.

Los pasos a seguir en esta investigación son continuar modelando el gasto en salud, aumentando enfermedades crónicas como cáncer y enfermedades cardiovasculares, así como enfermedades del riñón. Paralelamente, se está desarrollando la posibilidad de proyectar el gasto en salud, con los parámetros obtenidos en el estatus quo en el futuro, para observar qué tan insostenible es el gasto en salud, incorporando la transición demográfica y la epidemiológica.

## Referencias

- [1] Lagomarsino, G., Garabrant, A., Adyas, A., Muga, R., & Otoo, N. (2012). Moving towards universal health coverage: health insurance reforms in nine developing countries in Africa and Asia. *Lancet*, 380(9845), 933-943.
- [2] CIEP. (2013). Estado actual de la Seguridad Social en México, 2013. Disponible en: <http://ciep.mx/entrada-investigacion/estado-actual-de-la-seguridad-social-en-mexico-2013/>
- [3] CONAPO. (Diciembre de 2015). Consejo Nacional de Población. Disponible en: [http://www.conapo.gob.mx/es/CONAPO/Proyecciones\\_Datos](http://www.conapo.gob.mx/es/CONAPO/Proyecciones_Datos)
- [4] CONEVAL. (28 de agosto de 2017). Medición de la Pobreza. Disponible en: [http://www.coneval.org.mx/Medicion/MP/Paginas/Pobreza\\_2016.aspx](http://www.coneval.org.mx/Medicion/MP/Paginas/Pobreza_2016.aspx)
- [5] Cotler, P., & Rodríguez-Orregia, E. (2006). Microfinanzas y bienestar en el hogar en México. Escuela de Graduados en Administración Pública .
- [6] Lymer, S., & Brown, L. (2012). Developing a Dynamic Microsimulation Model of the Australian Health System: A means to Explore Impacts on obesity over the Next 50 Years. *Epidemiology Research International*, 1-14.
- [7] Ávila-Burgos, L., Serván-Mori, E., Wirtz, V. J., Sosa-Rubí, S. G., & Salinas-Rodríguez, A. (2013). Efectos del Seguro Popular sobre el gasto en salud en hogares mexicanos a diez años de su implementación. *Salud pública de México*, 55, S91-S99.
- [8] Arredondo, A. (2014). Type 2 diabetes and health care costs in Latin. *Medicine for Global Health*, 12-136.

- [9] Banco Mundial. (septiembre de 2015). Cobertura universal de salud: Panorama general. Disponible en:  
<http://www.bancomundial.org/es/topic/universalhealthcoverage/overview>
- [10] Bolaños, R. d., Shigematsu, L. M., Ruíz, J. A., Márquez, S. A., & Ávila, M. H. (2010). Costos directos de atención médica en pacientes con diabetes mellitus tipo 2 en México: análisis de microcosteo. *Rev Panam Salud Publica*, 28(6), 412-20.
- [11] Bourguignon, F., & Spadaro, A. (2006). Microsimulation as a tool for evaluating redistribution policies. *Journal of Economic Inequality*, 77-106.
- [12] Bray, F., Jemal, A., Torre, L. A., Forman, D., & Vineis, P. (2015). Long-term realism and cost-effectiveness: primary prevention in combatting cancer and associated inequalities worldwide. *Journal of the National Cancer Institute*, 107(12), djv273.
- [13] Deaton, A. (2013). *The Great Escape: health, wealth, and the origins of inequality*. Princeton: Princeton University Press.
- [14] Glassman, A., & Zolota, J. I. (2014). How Much Will Health Coverage Cost? Future Health Spending Scenarios in Brazil, Chile and Mexico. Disponible en: <http://www.cgdev.org/sites/default/files/CGD-Working-Paper-382-Glassman-Zolota-future-health-spending-Latin-America.pdf>
- [15] Gómez, O., Sesma, S., Becerril, V. M., Knaul, F. M., Arreola, H., & Frenk, J. (2011). *Sistema de Salud en México*. Cuernavaca, Morelos: Salud Pública de México.
- [16] Guzmán, J. d., & Vargas-Hernández, J. G. (2013). Modelo "plural-integral" de atención primaria a la salud enfocado a la satisfacción del usuario. *Humanitas: Revista de Investigación*, 10(10), 149-160.
- [17] IHME. (2013). Global Burden Disease. Disponible en:  
<http://vizhub.healthdata.org/irank/arrow.php>
- [18] IHME. (2013). Global Burden of Diseases, Injuries, and Risk Factors Study 2010. Disponible en:  
[http://www.healthdata.org/sites/default/files/files/country\\_profiles/GBD/ihme\\_gbd\\_country\\_report\\_mexico.pdf](http://www.healthdata.org/sites/default/files/files/country_profiles/GBD/ihme_gbd_country_report_mexico.pdf)
- [19] IMSS. (2008). Grupos Relacionados con el Diagnóstico (GDR).
- [20] IMSS. (2014). Informe al Ejecutivo Federal y al Congreso de la Unión sobre la situación financiera y los riesgos del Instituto 2013-2014. Instituto Mexicano del Seguro Social. Mexico, D.F.: Insituto Mexicano del Seguro Social.
- [21] IMSS. (2015). Memoria estadísticas 2015. Disponible en:  
<http://www.imss.gob.mx/conoce-al-imss/memoria-estadistica-2015>
- [22] IMSS. (28 de septiembre de 2012). Norma que establece las disposiciones generales para la aplicación de los grupos relacionados con el diagnóstico en el Instituto Mexicano del Seguro Social. Disponible en:  
[http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/pdf/manualesynormas/2000-001-026\\_0.pdf](http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/pdf/manualesynormas/2000-001-026_0.pdf)
- [23] INSP. (2012). Encuesta Nacional de Salud y Nutrición .
- [24] Manuel, D. G., Tuna, M., Hennessy, D., Bennett, C., Okhmatovskaia, A., Finès, P., y otros. (May de 2014). Projections of preventable risks for cardiovascular disease in Canada to 2021: a microsimulation modelling approach. *CMJA Open*, (2), E94-E101.
- [25] Musgrove, P. (1987). ¿ Cuanto mas vale prevenir que curar? reflexiones sobre la distribución de gastos en la atención médica. *Economía*, 10(19), 91-99.

- [26] OCDE Health Division. (2012). *Toward a New Comprehensive International Health and Health Care Policy Decision Support Tool*. OECD Health Division.
- [27] OECD. (2015). *Health at a Glance 2015*.
- [28] OMENT. (2016). *Últimas cifras de diabetes en México - ENSANUT MC 2016*. Disponible en: <http://oment.uanl.mx/ultimas-cifras-de-diabetes-en-mexico-ensanut-mc-2016/>
- [29] OMENT. (2016). *Uno de cada cuatro mexicanos padece hipertensión arterial - ENSANUT 2016*. Disponible en: <http://oment.uanl.mx/uno-de-cada-4-mexicanos-padece-hipertension-arterial-ensanut-2016/>
- [30] OMS. (2014). *Cobertura Universal*. Disponible en: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs395/es/>
- [31] Paolillo, E., Russi, U., Cabrera, D., Martins, L., Scasso, A., Constantin, M., y otros. (2008). *Grupos Relacionados por el Diagnóstico (GRD). Experiencia con IR-GRD en el Sanatorio Americano, sistema FEMI*. *Revista Médica del Uruguay*, 24(4), 257-265.
- [32] Pichon-Riviere, A., Augustovski, F., Bardach, A., Colantonio, L., & Group3, f. t. (2011). *Development and Validation of a Microsimulation Economic Model to Evaluate the Disease Burden Associated with Smoking and the Cost-Effectiveness of Tobacco Control Interventions in Latin America*. *Value in Health*, 14, S51-S59.
- [33] PiPP. (26 de julio de 2011). *Caracterización de modelos sanitarios y sistemas sanitarios*. Disponible en: <http://www.politicaspublicas.uncu.edu.ar/articulos/index/caracterizacion-de-modelos-sanitarios-y-sistemas-sanitarios>.
- [34] Richard, P., Shin, P., Beeson, T., Burke, L. S., Wood, S. F., & Rosenbaum, S. (2015). *Quality and Cost of Diabetes Mellitus Care* in. *PLoS ONE* 10(12): e0144075 .
- [35] Rodríguez Bolaños, R. d., Reynales Shigematsu, L. M., Jiménez Ruiz, J. A., Juárez Márquez, S. A., & Hernández Ávila, M. (2010). *Costos directos de atención médica en pacientes con diabetes mellitus tipo 2 en México: análisis*. *Panam Salud Publica*, 412-420.
- [36] Rutter, C. M., Zaslavsky, A., & Feuer, a. E. (2011). *Dynamic microsimulation models for health outcomes: a review*. *Medical Decision Making*, 31(1), 10-18.
- [37] SFP. (2015). *Sectoría de la Función Pública*. Disponible en: <http://www.gob.mx/sfp/acciones-y-programas/sistema-integral-de-informacion-de-padrones-de-programas-gubernamentales-siipp-g>
- [38] SHCP. (2012). *Presupuesto de Egresos de la Federación 2013*. Disponible en: <http://www.apartados.hacienda.gob.mx/presupuesto/temas/pef/2013/>
- [39] SHCP. (2013). *Presupuesto de Egresos de la Federación 2014*. Disponible en: <http://www.apartados.hacienda.gob.mx/presupuesto/temas/pef/2014/>
- [40] SHCP. (2014). *Presupuesto de Egresos de la Federación 2015*. Disponible en: <http://www.apartados.hacienda.gob.mx/presupuesto/temas/pef/2015/>
- [41] SHCP. (2015). *Presupuesto de Egresos de la Federación 2016*. Disponible en: <http://www.pef.hacienda.gob.mx/>
- [42] Soors, W., Devadasan, N., Durairaj, V., & Criel, B. (2010). *Community Health Insurance and Universal Coverage: Multiple paths, many rivers to cross*. *World Health Report*.

- [43] Statistics Canada. (2015). Pohem (Population Health Model). Disponible en: <http://www.statcan.gc.ca/eng/microsimulation/modgen/new/mods/pohem>
- [44] Urquieta-Salomón, J. E., & Villarreal-Páez, H. J. (2015). Evaluation on health coverage in Mexico: evidence of progress and challenges in the Mexican health system.
- [45] USC. (2011). Royal Center for Health Policy Simulation. Disponible en: <https://roybalhealthpolicy.usc.edu/about/>
- [46] Villarreal-Ríos, E., Campos Esparza, M., Galicia Rodríguez, L., Martínez González, L., Vargas Daza, E. R., Torres Labra, G., y otros. (2011). Costo anual per cápita en primer nivel de atención por género. *Ciência & Saúde Coletiva*, 16(3), 1961-1968.
- [47] Wang, Y. C., McPherson, K., Marsh, T., Gortmaker, S. L., & Brown, M. (2011). Health and economic burden of the projected obesity trends in the USA and the UK. *The Lancet*, 378(9793), 815-825. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0140-6736\(11\)60814-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0140-6736(11)60814-3).
- [48] World Bank. (septiembre de 2015). Going Universal: How 24 countries are implementing universal health coverage reforms from the bottom up. Disponible en: <http://www.worldbank.org/en/topic/universalhealthcoverage/publication/going-universal-how-24-countries-are-implementing-universal-health-coverage-reforms-from-bottom-up>

## Apéndice A. Resultados de las regresiones

**Tabla A1**  
**Resultados de las regresiones de probabilidad de ser diagnosticado con diabetes – Hombres y mujeres**

	Diabetes					
	Hombres			Mujeres		
	Coeficiente	Desv. Estándar	Valor Z	Coeficiente	Desv. Estándar	Valor Z
Edad	0.1427762*	0.000180	792.79	0.1120428*	0.000138	810.4
Edad^2	-0.0009972*	0.000002	-644.16	-0.0007637*	0.000001	-615.87
Casado	0.1070021*	0.000962	111.2	-0.0765879*	0.000724	-105.84
Indígena	0.1608561*	0.000875	183.83	0.0446971*	0.000801	55.8
Escolaridad	-0.0008756*	0.000081	-10.76	-0.0368963*	0.000081	-454.74
Trabaja	-0.3444372*	0.000882	-390.48	-0.1012595*	0.000782	-129.42
Toma	0.3369912*	0.003029	111.24	0.1587716*	0.003212	49.43
Fuma	-0.035096*	0.000745	-47.11	-0.0026451*	0.000840	-3.15
Rural	-0.2065761*	0.001076	-192.06	-0.1855315*	0.000951	-195.09
Toma*edad	-0.0079853*	0.000055	-145.65	-0.0052829*	0.000065	-81.96
Obesidad	0.185201*	0.000868	213.34	0.0283753*	0.000698	40.65
Antecedentes paternos	0.4107123*	0.000937	438.49	0.3548848*	0.000851	417.14
Antecedentes maternos	0.5211433*	0.000799	652.24	0.4873557*	0.000724	672.79
Constante	-5.813646*	0.005315	-1093.83	-4.595428*	0.003997	-1149.64

Notas: \* Significativo al 95% de confianza

**Tabla A2**  
**Resultados de las regresiones de probabilidad de ser diagnosticado con hipertensión – Hombres y mujeres**

	Hipertensión					
	Hombres			Mujeres		
	Coeficiente	Desv. Estándar	Valor Z	Coeficiente	Desv. Estándar	Valor Z
Edad	0.0545418*	0.000121	449.66	0.0386759*	0.000095	409.34
Edad^2	-0.0002359*	0.000001	-212.21	-0.0000757*	0.000001	-84.2
Casado	0.0675016*	0.000785	85.95	0.0191024*	0.000594	32.18
Indígena	-0.0314724*	0.000785	-40.12	0.0045847*	0.000660	6.95
Escolaridad	0.0047717*	0.000071	67.71	-0.0245309*	0.000067	-367.36
Trabaja	-0.3025973*	0.000768	-394.28	-0.1288286*	0.000617	-208.75
Toma	0.0101867*	0.002082	4.89	0.2172182*	0.002047	106.11
Fuma	0.0200691*	0.000636	31.54	0.0487425*	0.000669	72.85
Rural	-0.1779652*	0.000917	-194.08	-0.1111831*	0.000753	-147.7
Toma*edad	-0.0006425*	0.000040	-16.15	-0.0042514*	0.000045	-94.43
Obesidad	0.3326822*	0.000736	452.31	0.3197115*	0.000563	568.05
Antecedentes paternos	0.4149722*	0.000813	510.48	0.3701577*	0.000676	547.46
Antecedentes maternos	0.3836838*	0.000680	564.2	0.3883248*	0.000567	684.85
Constante	-3.148794*	0.003317	-949.24	-2.489906*	0.002590	-961.51

Notas: \* Significativo al 95% de confianza



**Tabla A3**  
**Resultados de las regresiones de probabilidad de ser diagnosticado con**  
**depresión – Hombres y mujeres**

	Hipertensión					
	Hombres			Mujeres		
	Coefficiente	Desviación Estándar	Valor Z	Coefficiente	Desviación Estándar	Valor Z
Edad	0.0320433*	0.00014	223.05	0.0433274*	0.000097	449.19
Edad^2	-0.0003062*	0.00000	-222.26	-0.0003993*	0.000001	-414.22
Casado	-0.2375075*	0.00088	-270.52	-0.0993478*	0.000574	-172.96
Indígena	0.0767394*	0.00093	82.19	-0.1178595*	0.000679	-173.6
Escolaridad	-0.0018472*	0.00009	-21.44	0.0103943*	0.000064	162.18
Trabaja	-0.2092419*	0.00092	-228.11	-0.0002427*	0.000585	-0.41
Toma	0.1801731*	0.00227	79.28	0.0454523*	0.001859	24.45
Fuma	0.0318969*	0.00077	41.43	0.2117169*	0.000630	336.24
Rural	-0.1653911*	0.00117	-141.67	-0.187461*	0.000789	-237.6
Toma*edad	-0.0040679*	0.00005	-84.98	0.000586*	0.000044	13.31
Obesidad	-0.0788418*	0.00100	-79.14	0.0339425*	0.000581	58.46
Diabetes	0.0096267*	0.00124	7.78	0.1103399*	0.000856	128.85
Hipertensión	0.6480771*	0.00096	672.99	0.4296444*	0.000662	649
Constante	-2.242504*	0.00373	-600.61	-2.228072*	0.002463	-904.69

Notas: \* Significativo al 95% de confianza



*Ensayos Revista de Economía* de la Universidad Autónoma de Nuevo León, volumen treinta y siete, número uno, se terminó de imprimir el primero de mayo del año dos mil dieciocho en los talleres de Serna Impresos, S.A. de C.V., Vallarta 345 Sur, Monterrey, Nuevo León, México, C.P. 64000.  
El tiraje consta de 30 ejemplares.



**Ensayos Revista de Economía** es una revista arbitrada que publica artículos de investigación inéditos de alto rigor académico en los campos de la economía aplicada y teórica, la estadística y las ciencias sociales afines. Se publican trabajos en español e inglés dos veces al año, enero y julio. Está indexada en EconLit (*American Economic Association*), SciELO México, Sistema de Clasificación de Revistas Mexicanas de Ciencia y Tecnología (CRMCyT) del Consejo Nacional de Ciencia, Humanidades y Tecnología (CONAHCYT), CLASE, Latindex, SciELO y puede consultarse en la base de datos Fuente Académica Premier™ de EBSCO y en *RePEc* (*Research Papers in Economics*).

#### **Instrucciones para autores:**

- Los trabajos deben corresponder a investigaciones concluidas que planteen claramente una hipótesis.
- Se dará preferencia a los trabajos que empleen un modelo teórico matemático como soporte o una metodología estadística/econométrica que someta a prueba la hipótesis.
- Los artículos deben enviarse acompañado de una carta firmada por el autor o los autores declarando que posee(n) los derechos de autor, que el trabajo es inédito y original, y que no está sometido, ni en proceso, para su publicación total o parcial en otra revista especializada o libro.
- El autor o los autores debe(n) enviar una copia de su currículum vitae.
- Los artículos pueden redactarse en inglés o español; sin embargo, el título, el resumen y las palabras clave deben presentarse en ambos idiomas.
- El resumen no excede las 150 palabras e incluye los códigos de clasificación JEL después del resumen.
- El título del trabajo debe ser claro y breve (máximo 10 palabras).
- Los manuscritos deben enviarse en formato compatible con Microsoft Word, con una extensión máxima de 45 cuartillas, interlineado de 1.5, y fuente Times New Roman tamaño 12.
- Las gráficas y cuadros deben enviarse en formato Excel. No se deben incluir gráficas o cuadros en formato de imagen.
- La sección de referencias incluye únicamente los trabajos citados en el texto, ordenados alfabéticamente y siguiendo el formato establecido para citar artículos, libros, capítulos de libros, informes técnicos, tesis, entre otras fuentes de información. Las instrucciones de citación están disponibles en la página de la revista.
- Los artículos deben enviarse de forma electrónica a través de la página de la revista: <http://ensayos.uanl.mx>. Para ello, el autor debe registrarse en la página como usuario y seguir los cinco pasos para nuevos envíos.

**Ensayos Revista de Economía** is a peer-reviewed journal that publishes original research articles of high academic rigor in the fields of applied and theoretical economics, statistics, and related social sciences. The journal publishes works in both Spanish and English twice a year, in January and July. It is indexed in EconLit (*American Economic Association*), SciELO Mexico, *Clasificación de Revistas Mexicanas de Ciencia y Tecnología* (CRMCyT) of the *National Council of Science, Humanities, and Technology* (CONAHCYT), CLASE, Latindex, SciELO, and can also be accessed through the *Fuente Académica Premier™* database by EBSCO and *RePEc* (*Research Papers in Economics*).

#### **Author guidelines:**

- The papers must correspond to completed research that clearly states a hypothesis.
- Preference will be given to papers that employ a supporting mathematical theoretical model or a statistical/econometric methodology that tests the hypothesis.
- Articles must be accompanied by a signed letter from the author(s) declaring ownership of the copyright, originality of the work, and that is not under review or in process for full or partial publication in another specialized journal or book.
- The author(s) must send a copy of their curriculum vitae.
- Articles may be written in English or Spanish; however, the title, abstract, and keywords must be presented in both languages.
- The abstract must not exceed 150 words, and should include JEL classification codes after the abstract.
- The article title should be clear and concise (maximum of 10 words).
- Manuscripts must be submitted in a Microsoft Word compatible format, with a maximum length of 45 pages, 1.5 line spacing, and Times New Roman font, size 12.
- Graphs and tables must be submitted in Excel format. Graphs or tables in image format are not accepted.
- The reference section should include only works cited in the text, listed alphabetically and following the citation format for articles, books, book chapters, technical reports, theses, and other sources. Citation guidelines are available on the journal's website.
- Articles must be submitted electronically through the journal's website: <https://ensayos.uanl.mx>. Authors must register as users and follow the five steps for new articles.

**E**NSAYOS  
*Revista de Economía*