ISSN 2448-8402

ENSAYOS
Revista de Economía

Volumen XLI, número 2 noviembre de 2022

Artículos

Eficiencia de los programas educativos en Colombia, 2007-2018

Francisco Javier Ayvar Campos, Orquidia Elizet Andrea Sosa León

Optimización dinámica aplicada al acuífero de San Luis Potosí

Noraima E. Rangel Sánchez, Leobardo Pedro Plata Perez, Pedro I. González Ramírez

Competencia oligopólica y comercio internacional: examinando la calidad de productos

Michel Eduardo Betancourt Gomez

Probando supuestos del modelo Flegg para regionalizar matrices insumo-producto

Edgardo Arturo Ayala Gaytán, Miriam Valdés Ibarra

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Economía
Centro de Investigaciones Económicas

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Universidad Autónoma de Nuevo León
Rector
Dr. med. Santos Guzmán López
Secretario General
Dr. Juan Paura García
Secretario Académico
Dr. Jaime Arturo Castillo Elizondo
Secretario de Extensión y Cultura
Dr. José Javier Villarreal Álvarez Tostado
Director de Editorial Universitaria
Lic. Antonio Jesús Ramos Revillas
Directora de la Facultad de Economía
Dra. Joana Cecilia Chapa Cantú
Director del Centro de Investigaciones Económicas
Dr. Edgar Mauricio Luna Domínguez

Editor Responsable
Dr. Jorge Omar Moreno Treviño
Editores Asociados
Dr. Edgar Mauricio Luna Domínguez
Dr. Daniel Flores Curiel
Dra. Cinthya Guadalupe Caamal Olvera
Dra. Joana Cecilia Chapa Cantú

Consejo Editorial
Alejandro Castañeda Sabido (Comisión Federal de Competencia Económica, México)
Dov Chernichovsky (University of the Negev, Israel)
Richard Dale (University of Reading, Inglaterra)
Alfonso Flores Lagunes (Syracuse University, EUA)
Chinhui Juhn (University of Houston, EUA)
Timothy Kehoe (University of Minnesota, EUA)
Félix Muñoz García (Washington State University, EUA)
Salvador Navarro (University of Western Ontario, Canadá)
José Pagán (The New York Academy of Medicine, EUA)
Elisenda Paluzie (Universitat de Barcelona, España)
Leobardo Plata Pérez (Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México)
Martín Puchet (Universidad Nacional Autónoma de México, México)
Patricia Reagan (Ohio State University, EUA)
Mark Rosenzweig (Yale University, EUA)
Ian Sheldon (Ohio State University, EUA)
Carlos Urzúa Macías († 2024) (Tecnológico de Monterrey, México)
Francisco Venegas Martínez (Instituto Politécnico Nacional, México)

Comité Editorial
Ernesto Aguayo Téllez, Lorenzo Blanco González (UANL, México)
Alejandro Ibarra Yúnez (Tecnológico de Monterrey, México)
Vicente Germán-Soto (Universidad Autónoma de Coahuila, México)
Raúl Ponce Rodríguez (Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México)
Ignacio de Loyola Perrotini Hernández (Universidad Nacional Autónoma de México)

Edición de redacción, estilo y formato
Paola Beatriz Cárdenas Pech
Bricelda Bedoy Varela

Ensayos Revista de Economía, Vol. 41, No. 2, julio-diciembre 2022. Es una publicación semestral, editada por la Universidad Autónoma de Nuevo León, a través de la Facultad de Economía con la colaboración del Centro de Investigaciones Económicas. Domicilio de la publicación: Av. Lázaro Cárdenas 4600 Ote., Fracc. Residencial Las Torres, Monterrey, N.L. C.P. 64930. Tel. +52 (81) 8329 4150 Ext. 2463 Fax. +52 (81) 8342 2897. Editor Responsable: Jorge Omar Moreno Treviño. Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2009-061215024200-102, ISSN 1870-221X, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Licitud de Título y Contenido No. 14910, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Registro de marca ante el Instituto Mexicano de la Propiedad Industrial: 1182771. Impresa por: Serna Impresos, S.A. de C.V., Vallarta 345 Sur, Centro, C.P. 64000, Monterrey, Nuevo León, México. Fecha de terminación de impresión: 1 de noviembre de 2022. Tiraje: 30 ejemplares. Distribuido por: Universidad Autónoma de Nuevo León, a través de la Facultad de Economía, Av. Lázaro Cárdenas 4600 Ote., Fracc. Residencial Las Torres, Monterrey, N.L. C.P. 64930.

Las opiniones y contenidos expresados en los artículos son responsabilidad exclusiva de los autores.

Impreso en México
Todos los derechos reservados
© Copyright 2022
ensayos.uanl.mx

Índice

Eficiencia de los programas educativos en Colombia, 2007-2018 101

Francisco Javier Ayvar Campos, Orquidia Elizet Andrea Sosa León

Optimización dinámica aplicada al acuífero de San Luis Potosí 135

Noraima E. Rangel Sánchez, Leobardo Pedro Plata Perez, Pedro I. González Ramírez

Competencia oligopólica y comercio internacional: examinando la calidad de productos 169

Michel Eduardo Betancourt Gomez

Probando supuestos del modelo Flegg para regionalizar matrices insumo-producto 193

Edgardo Arturo Ayala Gaytán, Miriam Valdés Ibarra

Ensayos Revista de Economía, 41(2), 101-134, Noviembre 2022
DOI: http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-1

UANL®

ENSAYOS Revista de Economía

ensayos.uanl.mx

Facultad de Economía

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN □ FACULTAD DE ECONOMÍA □ CENTRO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

Eficiencia de los programas educativos en Colombia, 2007-2018

Efficiency of Educational Programs in Colombia, 2007-2018

Francisco Javier Ayvar Campos[§*]
Orquidia Elizet Andrea Sosa León[*]

Información del artículo

Recibido:
24 abril 2021

Aceptado:
19 septiembre 2022

Clasificación JEL:
C67; I25; I28; I38

Palabras clave:
DEA; Programas educativos; Departamentos; Colombia

Resumen

La presente investigación analiza la eficiencia de 24 departamentos colombianos en el uso de sus recursos para cumplir con los objetivos de los programas educativos del país, durante el período 2007-2018. La valoración de la eficiencia se llevó a cabo mediante el Análisis de la Envolvente de Datos, diseñando tres modelos orientados al *output* y estructurados con rendimientos variables a escala. Los resultados de los modelos muestran que únicamente los departamentos de Bogotá D.C., Antioquia y Quindío emplearon de manera eficiente su personal docente y sedes educativas para incrementar el alfabetismo, la matriculación, y la equidad urbano-rural; por ello, es recomendable el establecimiento de políticas públicas orientadas a fortalecer el sector educativo, y con estas contribuir al bienestar de la sociedad.

[*] Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo; § francisco.ayvar@umich.mx
ISSN Electrónico: 2448-8402 | ISSN Impreso: 1870-221X | ©2022 Los autores

Citar así: Ayvar Campos, F. y Sosa León, O. (2022). Eficiencia de los programas educativos en Colombia, 2007-2018. *Ensayos Revista de Economía*, 41(2), 101-134, http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-1

Article information

Received:
24 april 2021

Accepted:
19 september 2022

JEL Classification:
C67; I25; I28; I38

Keywords:
DEA; Programas educativos; Departamentos; Colombia

Abstract

This research analyzes the efficiency of 24 departments of Colombia in the use of their resources to achieve the objective of the national educational programs, during the 2007-2018 period. The efficiency assessment was carried out through the Data Envelope Analysis (DEA), designing three models oriented to output and structured with variable returns to scale. The results of the three shows that only the departments of Bogota D.C., Antioquia, and Quindio efficiently used their teaching staff and educational facilities to increase literacy, enrollment, and urban-rural equity. Therefore, it is advisable to develop public policies aimed at strengthening the education sector, and thus contribute to the well-being of society.

Introducción

La educación es un factor prioritario y estratégico, así como un elemento esencial para la conformación de sociedades autónomas, democráticas y con altos niveles de desarrollo humano. En ese sentido es deber del Estado establecer las condiciones necesarias para que los individuos accedan a este derecho universal. De esta forma, de la política y programas educativos dependen las posibilidades que tiene una economía de concebir el progreso y el bienestar social (DNP, 2005). El sistema educativo colombiano ha experimentado en los últimos once años profundas transformaciones, sin embargo, aún persisten retos que hacen del bienestar educativo una asignatura pendiente (DNP, 2005; MEN, 2013; PNUD, 2015, 2016, 2020; UNESCO, 2017).

La UNESCO (2017) señala que Colombia no ha dado cumplimiento a los objetivos del milenio; al respecto, el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) (2021a-b) y el Departamento Nacional de Planeación (DNP) (2021) argumentan que el gran problema radica en el alto porcentaje de población analfabeta, la baja cantidad de estudiantes matriculados y la inequidad urbano-rural que prevalece en el país. Es debido a ello que la presente investigación analiza la eficiencia de 24 departamentos colombianos en el uso de sus recursos -docentes y sedes educativas- para cumplir con los objetivos de los programas educativos del país: alfabetización, matriculación y equidad rural, durante el período 2007-2018.

Para este fin se parte del término de bienestar social, ya que a partir de su medición se aprecia que la educación tiene una incidencia positiva y directa sobre el Índice de Desarrollo Humano (IDH) (Duarte y Jiménez, 2007; Zarzosa y Somarriba, 2013). Por su parte, de acuerdo con Navarro (2005), la eficiencia

ha sido abordada mediante métodos paramétricos y no paramétricos. Entre estos últimos destaca el Análisis de la Envolvente de Datos (DEA, por sus siglas en inglés), que es un modelo de frontera no paramétrico determinístico que empleando *inputs* y *outputs* establece, con base en el estudio comparativo, las mejores prácticas de un conjunto de unidades de análisis. A su vez, con el propósito de determinar el comportamiento temporal de la eficiencia se han desarrollado diferentes técnicas, sobresaliendo el Índice Malmquist (IM) (Brown y Domínguez, 2004).

La hipótesis de la presente investigación es que un pequeño número de departamentos colombianos fueron eficientes en el uso de sus recursos para cumplir los objetivos de los programas educativos del país, durante el período 2007-2018. Con el fin de corroborar esta hipótesis se establecieron tres modelos DEA con orientación *output* y estructurados bajo supuestos de rendimientos variables a escala. El primero se enfocó al estudio del Programa de Alfabetización; el segundo se orientó al Programa Matricúlate Más; y el tercero se encaminó al análisis del Programa de Equidad Rural. Adicionalmente, se calculó el IM para conocer la evolución, en el período de estudio, de la eficiencia en cada uno de los programas educativos.

El documento se encuentra dividido en tres apartados, el primero aborda los elementos contextuales del sector educativo en Colombia. En el segundo se analizan los aspectos teóricos de la eficiencia y se establecen los rasgos metodológicos de los tres modelos DEA. En el tercer apartado, se revisan y discuten los resultados obtenidos. Finalmente, se presentan las conclusiones, donde se enfatizan los principales elementos del trabajo.

1. Análisis de los indicadores educativos en Colombia

El presente apartado tiene por objetivo plantear el diagnóstico del sistema educativo colombiano. Es así como a continuación se esboza la evolución del IDH y sus dimensiones, y el comportamiento de los indicadores educativos en Colombia.

1.1. Dinámica del desarrollo humano y sus dimensiones

En 2019, el PNUD (2021a) ubicó a Colombia en la posición 83 del *ranking* mundial con un IDH de 0.767, es decir, se encuentra clasificado como un país de desarrollo humano alto. El índice de salud (0.881) fue la dimensión que más aporte tuvo en el IDH, seguida del índice de ingreso (0.749) y el índice de educación (0.682) (ver tabla 1).

Tabla 1
El IDH y sus dimensiones en Colombia, 2007-2019

	IDH	IS	II	IE
2007	0.704	0.812	0.695	0.618
2008	0.710	0.815	0.698	0.630
2009	0.715	0.818	0.699	0.639
2010	0.719	0.820	0.703	0.644
2011	0.725	0.823	0.710	0.652
2012	0.725	0.826	0.715	0.647
2013	0.735	0.828	0.721	0.664
2014	0.738	0.831	0.727	0.666
2015	0.742	0.834	0.733	0.669
2016	0.747	0.837	0.736	0.676
2017	0.763	0.876	0.747	0.678
2018	0.764	0.879	0.747	0.678
2019	0.767	0.881	0.749	0.682

Nota: IDH: Índice de Desarrollo Humano, IS: Índice de Salud, II: Índice de Ingreso, e IE: Índice de Educación.
Fuente: Elaboración propia con base en los datos del PNUD (2021a-b).

El desempeño creciente del IDH, y diferenciado en el caso de sus dimensiones, tiene como trasfondo el comportamiento de indicadores como la esperanza de vida al nacer, el Producto Interno Bruto (PIB) *per cápita*, el promedio de años estudiados, la cantidad de personas que saben leer y escribir, y el número de individuos matriculados en los cuatro niveles de educación[1] (PNUD, 2021b).

1.2. Diagnóstico de los indicadores educativos

El Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) (2021a-b) y el Departamento Nacional de Planeación (DNP) (2021) señalan que el número de personas alfabetas en Colombia ha aumentado de manera importante, al pasar de 35 millones en 2007 a 39.8 millones en 2018. Lo que implica que para el 2018, el 81.7% de la población en el país sabía leer y escribir. A nivel de departamentos, Bogotá, Antioquia y Valle del Cauca tenían la mayor cantidad de personas alfabetas (15.8 millones en total). Mientras que Chocó, Caquetá y Quindío son los que menor volumen de personas alfabetas (1.1 millones en total) tuvieron en el período 2007-2018. Por otro lado, la matriculación en los cuatro niveles educativos, durante el período de estudio, mostró un decrecimiento del 16.2%. Siendo Bogotá, Antioquia y Valle del Cauca los departamentos que tuvieron el mayor número de matriculados (2.9 millones de alumnos en total); situación opuesta a la expuesta por Caquetá, Chocó y Quindío (305 mil alumnos en total) (véase la tabla 1A del anexo). Este comportamiento se relaciona con el gasto público en educación, la

[1] Los cuatro niveles de educación formal en Colombia a los que se hace referencia son educación preescolar, educación básica primaria, educación básica secundaria y educación media (DANE, 2021a-b).

disponibilidad de docentes, el establecimiento de escuelas en los distintos niveles y la inestabilidad social generada por grupos armados en ciertos departamentos del país (Junca, 2018; MEN, 2017; Sarmiento, 2010).

La cantidad de docentes en Colombia permaneció estable de 2007 a 2013, sin embargo, en 2014 reportó una baja de 17.2%; ello se debió al nuevo sistema de admisión de maestros y al cierre de escuelas por no cumplir con los estándares de calidad (Aguilar-Barreto et al., 2017; MEN, 2017). En términos departamentales sobresalieron Bogotá, Antioquia y Valle del Cauca por contar con el mayor número de docentes (165 mil en total); y Caquetá, Chocó y Quindío por tener la menor cantidad de ellos (16 mil en total). En términos de sedes educativas, durante el período 2007-2018, estas oscilaron entre 117,352 y 55,485; la variación se debió a la orientación del gasto público destinado a la educación, los docentes disponibles y la demanda por el servicio (ver tabla 2A del anexo).

El gasto público en educación, de acuerdo con el DNP (2021a-b), aumentó de forma significativa de 2007 a 2018 (véase tabla 3A del anexo). Sin embargo, las cifras de población alfabeta, matriculación, número de docentes y sedes educativas evidencian que el Estado como proveedor de bienestar educativo no ha brindado los recursos necesarios para que la población de todos los departamentos de Colombia, de manera equitativa, tengan acceso a una educación adecuada (ver tablas 4A, 5A y 6A del anexo). Situación que incide en el nivel de desarrollo y bienestar social, como se demostró en el índice de educación del desarrollo humano y en el propio IDH (PNUD, 2021a-b).

2. Marco teórico y rasgos metodológicos de los modelos DEA

A continuación, se analizan los aspectos teóricos de la eficiencia y se establecen los rasgos metodológicos de los modelos DEA. Ello con la finalidad de sustentar teórica-metodológicamente el instrumento de investigación.

2.1. Nexo teórico entre bienestar social, política educativa y eficiencia

Duarte y Jiménez (2007) señalan que el bienestar social está relacionado con la saciedad que experimentan los integrantes de una comunidad al ver cubiertas todas sus necesidades. Por otro lado, Pena-Trapero (2009) sostiene que el bienestar social contiene aspectos objetivos y subjetivos que tradicionalmente se miden a partir del enfoque económico, de las funciones de utilidad y de indicadores sociales sintéticos. La medición sustentada en indicadores sociales sintéticos es considerada como la más adecuada, dado que adopta en un solo

valor varios componentes que expresan el bienestar de los individuos. Destacando, en esta lógica, el Índice de Desarrollo Humano (IDH) que toma en consideración los factores educación, salud e ingreso, y establece una valoración aproximada del nivel de desarrollo y bienestar de la sociedad (Harttgen y Klasen, 2012).

La educación se ha definido como un bien público y, por lo tanto, su provisión depende del Estado. La política educativa es la acción gubernamental que a través de programas educativos busca atender este derecho universal, a favor del bienestar social (Cassani, 1982; DNP, 2005; Reimers, 1995). En este orden de ideas, la educación es un elemento clave para el desarrollo y bienestar social de un país, motivo por el cual el Gobierno mediante su política educativa genera las condiciones para que los individuos amplíen sus capacidades y contribuyan al crecimiento económico, teniendo en mente los ideales de paz, libertad y justicia social (*Constitución Política de Colombia*, 1991; Delgado, 2017; Delors, 1996; Ortegón, 2008).

La eficiencia se concibe como la relación entre los resultados obtenidos (*outputs*) y los recursos utilizados (*inputs*) (Coll y Blasco, 2006). Farrell (1957) propuso cuantificarla a partir del estudio comparativo de unidades de análisis (DMUs, por sus siglas en inglés). Las alternativas metodológicas para hacerlo tienen sus raíces en los métodos de no-frontera y los de frontera. Estos últimos se subdividen en métodos de fronteras no paramétricas determinísticas, fronteras paramétricas determinísticas, fronteras estadísticas determinísticas y fronteras estocásticas. El Análisis de la Envolvente de Datos (DEA, por sus siglas en inglés) se suscribe como un modelo de frontera no paramétrico determinístico (Navarro, 2005).

El DEA tiene sus raíces en la tesis doctoral de Rhodes (1978) y se establece como la extensión del trabajo de Farrell (1957). DEA es una técnica de programación matemática que permite la construcción de una superficie envolvente, frontera eficiente o función de producción empírica, con base en los datos disponibles de un conjunto de DMUs eficientes, siendo ineficientes aquellas que no se posicionan sobre la misma (Coll y Blasco, 2006). En ese sentido, determina la eficiencia con fundamento en el *benchmarking*, la dotación de *inputs* y la generación de *outputs*. Una DMU es eficiente cuando genera más de algún *output* sin producir menos del resto y sin consumir más *inputs*, o bien, cuando utilizando menos de algún *input*, y no más del resto, gesta los mismos *outputs* (Cooper et al., 2007). Los principales modelos DEA son el aditivo, el multiplicativo, el de Rendimientos Constantes a Escala (CCR, por sus siglas en inglés) y el de Rendimientos Variables a Escala (VRS, por sus siglas en inglés). Por otro lado, el análisis *slacks* de las variables en los modelos DEA establece la dirección en la cual habrán de mejorarse

adicionalmente los niveles de eficiencia de las DMUs. Es así que un valor *output slack* representa el nivel adicional de *outputs* requeridos para convertir una DMU ineficiente en una eficiente; y un valor *input slack* simboliza las reducciones adicionales de los correspondientes *inputs* para que una DMU sea eficiente (Coelli et al., 2002; Coll y Blasco, 2006).

El estudio dinámico de la eficiencia, de acuerdo con Giménez (2000), se ha abordado a partir de las fronteras contemporáneas, fronteras secuenciales, fronteras intertemporales, el *windows analysis*, el índice de productividad Malmquist y el índice de productividad Malmquist-Luenberger. El índice de productividad Malmquist o Índice Malmquist (IM) fue presentado por Caves et al. (1982) a partir del trabajo de Sten Malmquist (1953). Calculado mediante el DEA, permite medir los cambios en la productividad, como producto de modificaciones en la eficiencia relativa (*catch up*) y en la tecnología (*technological change*) (Färe et al., 1994).

La relación que existe entre la política educativa y el análisis de eficiencia radica en que las acciones gubernamentales, a fin de que cumplan sus objetivos, deben de ser evaluadas. Esta valoración se realiza a partir de la determinación de la eficacia y eficiencia de la política pública (Mariñez y Garza, 2009; Venetoklis, 2002). Si bien de manera tradicional el DEA se orienta al estudio de unidades de producción tradicionales, en años recientes se ha aplicado al estudio del desarrollo, bienestar, calidad de vida, salud, educación, etc. (Arcelus et al., 2005; Ayaviri y Quispe, 2011; Despotis, 2005b; Gómez, 2001; Goñi, 1998; Liu et al., 2013; Martín, 2008; Miranda y Araya, 2003; Murias et al., 2010). Convirtiéndose en una técnica adecuada para evaluar la eficiencia de las políticas y programas específicos que aplica el Estado a favor de la educación y el bienestar de la sociedad.

2.2. Rasgos metodológicos de los modelos DEA

Se consideraron 24 departamentos de Colombia como DMUs debido a que a lo largo del período 2007-2018 fueron receptores de los apoyos de los programas educativos nacionales orientados a la alfabetización, matriculación y equidad urbano-rural. La determinación de los *outputs* se basó en la representatividad teórica y el acceso a los datos. De esta forma, se estableció que el *output* para el Programa de Alfabetización fuera la población alfabeta, para el Programa Matricúlate Más el número de alumnos inscritos en los cuatro niveles educativos, y para el Programa de Equidad Rural la cantidad de individuos matriculados en la zona rural y urbana (Ayaviri y Zamora, 2016; DANE, 2021; DNP, 2021; Garzón et al., 2011; Gómez et al., 2003; López-

Torres y Prior, 2020; Navas et al., 2020; Thanassoulis et al., 2011; Torres-Samuel et al., 2020).

La selección de los *inputs*, para cada uno de los programas educativos (Alfabetización, Matricúlate Más y Equidad Rural), se fundó en el sustento teórico de los indicadores, la disponibilidad de estadísticas y el análisis factorial. Los *inputs* más utilizados en la literatura son cantidad de docentes, aulas disponibles, número de sedes educativas, cantidad de personal administrativo, gasto público en educación, gasto *per cápita* por estudiante, número de créditos impartidos y el entorno familiar (Aparicio et al., 2019; Ayaviri y Zamora, 2016; Azar, 2016; Chediak y Rodríguez, 2011; Garzón et al., 2011; Gómez et al., 2003; Lagravinese et al., 2020; López-Torres y Prior, 2020; Melo-Becerra et al., 2020; Moreno, 2008; Navas et al., 2020; Seijas, 2005; Thanassoulis et al., 2011; Torres-Samuel et al., 2020; Wolszczak-Derlacz, 2017).

Tabla 2
***Inputs* y *Outputs* por programa educativo**

1. Programa de Alfabetización		
Output	Alfabetización.	Número de personas alfabetas mayor o igual a 5 años.
Input	Docentes.	Número de profesores en los cuatro niveles educativos.
Input	Sedes educativas.	Cantidad de sedes en los cuatro niveles educativos.
2. Programa Matricúlate Más		
Output	Matriculación.	Número de alumnos en los cuatro niveles educativos.
Input	Docentes.	Número de profesores en los cuatro niveles educativos.
Input	Sedes educativas.	Cantidad de sedes en los cuatro niveles educativos.
3. Programa Equidad Rural		
Output	Matriculación en zona rural y urbana.	Número de alumnos en los cuatro niveles educativos (Zona Rural-Urbana).
Input	Docentes en zona rural y urbana.	Número de profesores en los cuatro niveles educativos (Zona Rural-Urbana).
Input	Sedes educativas en zona rural y urbana.	Cantidad de sedes en los cuatro niveles educativos (Zona Rural-Urbana).

Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 7A, 8A, 9A y 10A del anexo.

Con base en la disposición de información estadística en el DANE (2021a-b) y el DNP (2021), el número de variables se redujo a la cantidad total de docentes en los cuatro niveles educativos, el número de docentes en la zona rural y urbana, la cantidad total de sedes educativas en los cuatro niveles educativos, el número de sedes educativas en la zona rural y urbana, el PIB *per cápita*, la población total y el gasto público en educación. Con estos indicadores se procedió a realizar el análisis factorial[2] para cada programa educativo (véase tablas 7A, 8A, 9A y 10A). Los resultados de los ensayos factoriales mostraron que los *inputs* más adecuados eran los establecidos en la tabla 2.

Dada la especificación de los *outputs* e *inputs* se estableció que los tres modelos DEA estarían orientados al *output* y se calcularían bajo supuestos de VRS. Debido a que permitiría determinar a las DMUs que con menos *inputs* generan la mayor cantidad de *output*, efectuando el *benchmarking* exclusivamente entre unidades de similar tamaño y no con todas aquellas presentes en el problema. La expresión matemática de los modelos es la siguiente (Navarro, 2005):

$$Max\ \emptyset\ s.a \tag{1}$$

$$\left(\sum_{J=1}^{I} \lambda\, j\Upsilon_{rj}\right) \quad -s_r^+ = \emptyset y_{r0} \quad r = 1 \ldots . m$$

$$\left(\sum_{J=1}^{I} \lambda\, j\mathrm{X}_{\mathrm{\acute{\imath}}j}\right) \quad -s_r^- = x_{i0} \qquad i = 1 \ldots . m$$

$$\lambda_{j,} s_{r,}^+ s_r^- \geq 0;\ \emptyset\ libre\ del\ signo$$

En la ecuación 1 se considera la presencia de *n* DMUs, cada DMU puede utilizar *m inputs* para generar *s outputs*. El vector *Xij* representa la cantidad de *input i* empleado por la DMU j, en tanto que el vector *Yrj* constituye la cantidad de *output r* producido por la DMU j. La variable (λj) indica el peso de la DMUz en la configuración de la unidad virtual de referencia de la DMU j, que se obtiene por la combinación lineal del resto de DMUs. Si la unidad virtual no puede ser establecida, la DMUz se considerará eficiente. El escalar (φ)

[2] El análisis factorial es una técnica de reducción de datos utilizada para encontrar grupos homogéneos de variables a partir de un gran conjunto de variables. El método empleado para llevar a cabo los ensayos factoriales, en este estudio, fue el de componentes principales, aplicando las pruebas de Kaiser-Meyer-Olkin y de esfericidad de Bartlett. La matriz de componentes obtenida permitió identificar por programa educativo los *inputs* más representativos (Espejel et al., 2004; Zamora et al. 2010; Castañeda et al., 2010).

simboliza la máxima expansión radial de los *outputs* producidos por la unidad que se evalúa. El valor de φ oscila entre 0 y 1, tomará un valor de 1 cuando la DMU sea eficiente y valores inferiores a la unidad cuando sea ineficiente.

Con el fin de determinar la evolución en el tiempo de la eficiencia de los programas educativos nacionales, se calculó el Índice Malmquist (IM), el cual tiene origen en los trabajos de Caves et al. (1982). El IM se basa en funciones de frontera y en separar la Productividad Total de los Factores (PTF), empleando una ecuación que mide la distancia entre una economía y su función de producción. Es así como el índice establece que tan cerca se encuentra un nivel de producción del nivel de eficiencia técnica, dado el conjunto de factores de producción (Brown y Domínguez, 2004). La representación matemática del IM es la siguiente:

$$M_i(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{D_i^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_i^t(x^t, y^t)} * \left[\frac{D_i^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_i^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{D_i^t(x^t, y^t)}{D_i^{t+1}(x^t, y^t)}\right]^{1/2} \quad (2)$$

donde el cociente entre corchetes es la media geométrica de dos cocientes que reflejan movimientos de la frontera tecnológica entre los dos períodos *t* y *t+1*, revelando cambio tecnológico; si este adopta un valor >1 demuestra que ha habido progreso tecnológico, si es <1 que hay regresión tecnológica y si es =1 la tecnología se ha mantenido.

Por otro lado, el cociente fuera de los corchetes representa el cambio en la eficiencia relativa, medida como cociente entre las eficiencias de los períodos que se consideran; si el cociente es >1 revela una mejora en la eficiencia relativa en el periodo *t* a *t+1*, si es <1 la eficiencia relativa ha empeorado y si es =1 la eficiencia relativa se ha mantenido. Así, la multiplicación entre estos dos cocientes da como resultado el IM, que si es >1 representa cambio en la productividad, si es =1 la productividad no cambio y si es <1 se presentaron retrocesos en la productividad (Brown y Domínguez 2004).

3. Análisis y discusión de la eficiencia de los programas educativos en Colombia

En el apartado se muestran los resultados de eficiencia de los programas nacionales de alfabetización, Matricúlate Más y Equidad Rural en Colombia; asimismo, se expone la evolución en el tiempo de la eficiencia en cada uno de ellos a partir del IM.

3.1. Programa de Alfabetización

La tabla 11A del anexo muestra la eficiencia de 24 departamentos colombianos en la utilización de los docentes y sedes educativas para incrementar la alfabetización de la población. En ese sentido, se aprecia que Bogotá D.C., Quindío y Antioquia fueron eficientes durante el período 2007-2018. Por otro lado, se identificó que Sucre, Chocó y Magdalena fueron los más ineficientes durante el período en cuestión. Situación que permite señalar que 21 departamentos requieren aprovechar de mejor manera sus recursos educativos para acrecentar el número de personas alfabetas.

En términos del IM, en la tabla 12A del anexo se observa que, a lo largo del período de estudio, 22 departamentos arrojaron resultados positivos en términos de productividad, como consecuencia de un cambio tecnológico. Sin embargo, la eficiencia relativa empeoró, salvo en el caso de Bogotá D.C., Quindío, Antioquia, Atlántico, Nariño y Valle del Cauca. Los resultados que muestran las tablas 11A y 12A del anexo dan cuenta de que el programa nacional de alfabetización no ha alcanzado su objetivo, ya que en la mayoría de los departamentos estudiados es necesario incrementar la población alfabeta. Lo cual, de acuerdo con Schultz (1959), Moreno (2008), Sarmiento, (2010), Carnoy (2012), MEN (2017), Aguilar-Barreto et al. (2017) y Junca (2018), se podría lograr eficientizando el uso de los recursos y ampliando las campañas de educación a lo largo del territorio nacional.

3.2. Programa Matricúlate Más

Al efectuar el cálculo de la eficiencia en el caso del Programa Matricúlate Más, se observa que Antioquia, Bogotá D.C. y Quindío fueron eficientes en la utilización de los docentes y sedes educativas para aumentar la matrícula (ver la tabla 13A del anexo). Mientras que Cauca, Boyacá y Chocó presentaron los valores más altos de ineficiencia. Ello representa que en 21 departamentos de Colombia el programa no alcanzó el objetivo y en la mayoría de los casos se requiere aumentar en 14% el número de estudiantes matriculados.

En la tabla 14A del anexo se observa que, durante el período 2007-2018, los departamentos Atlántico, Bogotá D.C., Bolívar, César, Magdalena y Risaralda presentaron un IM superior a la unidad, es decir, que tuvieron mejoras en la productividad a consecuencia de modificaciones en la eficiencia relativa y al cambio tecnológico. Destaca también que 18 departamentos tuvieron retrocesos en la productividad, como consecuencia de la ineficiencia relativa en el uso de los recursos. Con base en los resultados que se muestran en las

tablas 13A y 14A y tomando en cuenta lo estipulado por Schultz (1959), Seijas (2005), Martín (2008), Moreno (2008), Rojas (2010), Sarmiento (2010), Garzón et al. (2011), Carnoy (2012), MEN (2017), UNESCO (2017), Aguilar-Barreto et al. (2017), Delgado (2017) y Melo-Becerra et al. (2020), se deberán efectuar esfuerzos para lograr un adecuado aprovechamiento de los docentes y sedes educativas, fomentar la aplicación de mecanismos de control y rendición de cuentas e impulsar con mayor fuerza las campañas de matriculación en todos los departamentos.

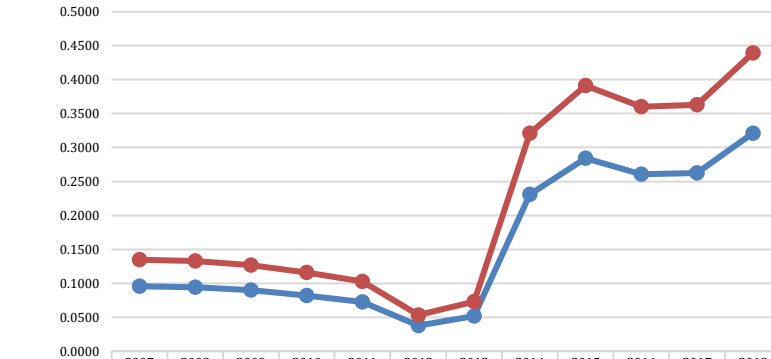
3.3. Programa Equidad Rural

Los departamentos de la zona rural considerados como eficientes, durante el período 2007-2018, en el manejo de sus recursos educativos para favorecer la equidad urbano-rural fueron Bogotá D.C. y Quindío. A su vez, los más ineficientes fueron Boyacá, Caldas, Caquetá, Norte de Santander, Risaralda y Santander. En términos generales, los 22 departamentos considerados como ineficientes deberán incrementar la matriculación en 35% con los recursos que poseen (ver tabla 15A del anexo). En el caso de las zonas urbanas, se observó que los departamentos de Antioquia, Bogotá D.C. y Chocó fueron eficientes durante el período de estudio. Mientras que Boyacá, Cauca, Risaralda, Santander y Tolima fueron los más ineficientes. Los resultados en este caso establecen que los 21 departamentos ineficientes tendrán que aumentar la cantidad de alumnos matriculados en un 12.8% con sus insumos actuales (véase tabla 15A del anexo).

Mediante el análisis del IM fue posible visualizar que los departamentos eficientes, tanto en la zona rural como urbana, tuvieron mejoras en la productividad en el período 2007-2018, como consecuencia de los cambios tecnológicos y las mejoras en la eficiencia relativa. Por otro lado, al llevar a cabo el comparativo entre las áreas de estudio se apreció que la zona urbana fue más eficiente que la zona rural y que los departamentos urbanos ostentaron mejoras en su eficiencia y productividad a lo largo del período analizado, mientras que los de corte rural mostraron decrementos importantes en ambos términos (ver tabla 16A del anexo).

Con el propósito de corroborar e identificar qué tanto se acercan o alejan en el tiempo las zonas rural y urbana, en términos del manejo eficiente de los recursos, se llevó a cabo un análisis de convergencia sigma (σ). Entendida esta como la convergencia que busca probar que la dispersión de la variable de estudio tiende a disminuir en el tiempo. La convergencia σ se cuantifica mediante la desviación estándar o el coeficiente de variación del logaritmo del indicador estadístico en cuestión, en este caso, la eficiencia (Cuervo, 2004).

Figura 1
Convergencia σ de la eficiencia rural-urbana de los departamentos de Colombia, 2007-2015



	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
DE LN	0.0956	0.0942	0.0897	0.0821	0.0727	0.0377	0.0518	0.2310	0.2842	0.2605	0.2625	0.3212
CV	0.1348	0.1328	0.1266	0.1158	0.1026	0.0534	0.0732	0.3210	0.3914	0.3603	0.3629	0.4392

Fuente: Elaboración propia con base en la tabla 15A del anexo y utilizando la metodología de Sala-I-Martin (2000).

Como se muestra en la figura 1, las zonas rural y urbana tuvieron un comportamiento divergente. Es decir, en el período 2007-2018 la eficiencia de las zonas urbanas tendió a diferenciarse o alejarse de la eficiencia de las zonas rurales. Los resultados que se muestran en las tablas 15A, 16A y la figura 1 evidencian la brecha de inequidad educativa que actualmente existe entre los departamentos y entre las áreas urbanas y rurales de Colombia; por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, en conjunto con otros agentes sociales, deberá de emprender acciones que favorezcan un desarrollo educativo más equitativo en el país (Schultz, 1959; DNP, 2005; Moreno, 2008; Rojas, 2010; Carnoy, 2012; Delgado, 2017; MEN, 2013, 2017; Junca, 2018; Melo-Becerra et al., 2020; Navas et al., 2020; Torres-Samuel et al., 2020).

Los resultados obtenidos en materia de eficiencia de la política educativa nacional a nivel departamental permitieron apreciar la evolución del desarrollo educativo en Colombia. En ese sentido, se identificó que el uso eficiente de los recursos contribuye a mayores niveles de educación. Sin embargo, es una asignatura pendiente el aumentar el alfabetismo, la matriculación y la equidad urbano-rural. Por ende, el Estado deberá superar estas carencias educativas a través de acciones que aumenten la cantidad de recursos, fomenten la transparencia, consoliden el uso eficiente de los recursos y mejoren la calidad

de vida de toda la población de Colombia (Aparicio et al., 2019; Ayaviri y Zamora, 2016; Azar, 2016; Chediak y Rodríguez, 2011; Garzón et al., 2011; Gómez et al., 2003; Lagravinese et al., 2020; López-Torres y Prior, 2020; Melo-Becerra et al., 2020; Moreno, 2008; Navas et al., 2020; Seijas, 2005; Thanassoulis et al., 2011; Torres-Samuel et al., 2020; Wolszczak-Derlacz, 2017).

Conclusiones

El Índice de Desarrollo Humano de Colombia muestra que la economía del país tiene un alto nivel de desarrollo humano, sin embargo, sustenta su bienestar en la dinámica de dos dimensiones (salud e ingreso). Lo que implica que es una tarea pendiente del Estado colombiano incrementar el bienestar educativo de su población. Al respecto, si bien en los últimos años el país ha implementado una serie de políticas y programas educativos en busca de mayores niveles de alfabetismo, matriculación y equidad urbano-rural, los indicadores estadísticos denotan que queda mucho por mejorar. De manera específica, se aprecia en los informes del DANE y el DNP, así como en la evidencia empírica, que existe un incremento del analfabetismo, una disminución de la matriculación, y una elevada concentración de los recursos educativos en áreas de tipo urbano; aunado a una inestabilidad social que afecta la eficacia y eficiencia de las acciones públicas.

Tomando en consideración este contexto y el vínculo teórico entre bienestar social, política educativa y eficiencia, se establecieron tres modelos, haciendo uso del DEA, para determinar qué tan eficientes fueron veinticuatro departamentos de Colombia en el uso de sus recursos -docentes y sedes educativas- para alcanzar los objetivos de los programas educativos nacionales de alfabetización, matriculación y equidad rural, durante el período 2007-2018. Los tres modelos DEA se orientaron al *output* y se calcularon bajo supuestos de VRS; además, se determinó la evolución de la eficiencia y la productividad a partir del índice Malmquist. Los *outputs* e *inputs* de los modelos de eficiencia quedaron establecidos, de la siguiente forma: a) Programa de Alfabetización: el *output* fue la población alfabeta y los *inputs* los docentes y sedes educativas; b) Programa Matricúlate Más: el *output* fue el número de alumnos matriculados en los cuatro niveles educativos y los *inputs* los docentes y sedes educativas; y c) Programa Equidad Rural: el *output* fue la matriculación en zona rural y urbana, y los *inputs* los docentes y sedes educativas en zona rural y urbana.

De los resultados obtenidos en los tres modelos, se observa que los departamentos de Bogotá D.C., Antioquia y Quindío emplearon de manera eficiente su personal docente y sedes educativas para incrementar el

alfabetismo, la matriculación y la equidad rural. Mientras que el índice Malmquist, en estos casos, reflejó que los tres departamentos documentaron mejoras en la productividad en los tres programas, como consecuencia del adecuado uso de los recursos y el cambio tecnológico presente durante el período 2007-2018. Asimismo, los resultados de los tres programas educativos nacionales dan cuenta de que, en 21 departamentos de Colombia, los programas de alfabetización, matriculación y equidad rural no han alcanzado su objetivo. Por lo que será labor del Estado implementar las adecuaciones y acciones para que los departamentos utilicen de manera eficiente sus recursos e incremente de forma homogénea el bienestar y desarrollo educativo.

Por último, dentro de las líneas de investigación a explorar en el futuro, orientadas a atender las limitaciones del presente estudio, se encuentran: a) identificar la incidencia de variables contextuales en el uso eficiente de los recursos educativos, b) explorar el impacto de los factores espaciales en el uso eficiente de los recursos para generar bienestar educativo, c) investigar el vínculo que existe entre el desempeño eficiente de la política educativa con la política de salud y la política económica, y d) contrastar los resultados de calidad educativa y sus determinantes con el uso eficiente de los recursos.

Referencias

[1] Aguilar-Barreto, A., Velandia-Riaño, Y., Aguilar-Barreto, C. y Rincón, G. (2017). "Gestión educativa: Tendencias de las políticas públicas educativas implementadas en Colombia". *Revista Perspectivas*, 2(2), 84–94.

[2] Aparicio, J., Cordero, J. y Ortiz, L. (2019). "Measuring efficiency in education: The influence of imprecision and variability in data on DEA estimates". *Socio-Economic Planning Sciences*, 68, 100698.

[3] Arcelus, F., Sharma, B. y Srinivasan, G. (2005). "The human development index adjusted for efficient resource utilization". *Research Paper, UNU-WIDER (2005/08; Inequality, Poverty and Well-Being)*. Palgrave Macmillan UK.

[4] Ayaviri, D. y Quispe, G. (2011). "Medición de la eficiencia asignativa mediante el análisis envolvente de datos en los municipios de Bolivia: Caso municipios de Potosí". *Revista Perspectiva*, 14(28), 137–169.

[5] Ayaviri, V. y Zamora, G. (2016). "Medición de la eficiencia en las Universidades. Una propuesta metodológica". *Revista Perspectivas*, 37, 7–22.

[6] Azar, P. (2016). "The efficiency of public education spending in Latin America: A comparison to high income countries". *International Journal of Educational Development*, 49, 188–203.

[7] Brown, F. y Domínguez, L. (2004). "Evolución de la productividad en la industria mexicana: Una aplicación con el método de Malmquist". *Investigación Económica*, LXIII (249), 75–100.

[8] Carnoy, M. (2012). *Economía de la educación*, España: Universitat Oberta de Catalunya (UOC).

[9] Cassani, J. E. (1982). *Fundamentos y alcances de la política educacional*. Argentina: Librería del Colegio.
[10] Castañeda, M., Cabrera, A., Navarro, Y. y Vries, W. (2010). *Procesamiento de datos y análisis estadísticos utilizando SPSS*. Brasil: ediPUCRS.
[11] Caves, D., Christensen, L. y Diewert, W. (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity. *Econometrica*, 50(6), 1393–1414.
[12] Chediak, F. y Rodríguez, Y. (2011). "La eficiencia relativa en cobertura educativa de los municipios del Tolima, aplicando el análisis envolvente de datos DEA". *Scientia et Technica*, 17(47), 44–48.
[13] Coelli, T., Rahman, S. y Thirtle, C. (2002). "Technical, allocative, cost and scale efficiencies in Bangladesh rice cultivation: A non-parametric approach". *Journal of Agricultural Economics*, 53(3), 607–626.
[14] Coll, V., y Blasco, O. (2006). *Evaluación de la eficiencia técnica mediante el Análisis Envolvente de Datos*. España: Universidad de Valencia.
[15] Constitución Política de Colombia (1991). *Congreso de la República de Colombia*. http://www.secretariasenado.gov.co/index.php/constitucion-politica
[16] Cooper, W., Seiford, L. y Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis. A comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver Software*. Holanda: Springer Science & Business Media.
[17] Cuervo, L. (2004). "Estudios de convergencia y divergencia regional en América Latina: balance y perspectivas". *Investigaciones Regionales*, 5, 29–65.
[18] Delgado, W. (2017). "Análisis de la política educativa colombiana desde la teoría del constructivismo estructuralista". *Revista Boletín Redipe*, 6(2). 67-80.
[19] Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Francia: UNESCO.
[20] Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). (2021a). *Educación formal histórico 2007-2018*. Histórico Educación. https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/educacion/poblacion-escolarizada/educacion-formal/historico-educacion
[21] DANE. (2021b). *PIB por departamento*. Cuentas Nacionales. https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/cuentas-nacionales/cuentas-nacionales-departamentales
[22] Departamento Nacional de Planeación (DNP). (2005). *Metas y estrategias de Colombia para el logro de los Objetivos de Desarrollo del Milenio*. CONPES Social 91. https://www.dnp.gov.co/programas/desarrollo-social/políticas-sociales-transversales/Paginas/objetivos-de-desarrollo-del-milenio.aspx
[23] DNP. (2021). Información solicitada vía correo electrónico y enviada por: centrodeservicios@dnp.gov.co
[24] Despotis, D. (2005). "Measuring human development via data envelopment analysis: The case of Asia and the Pacific". *Omega*, 33, 385–390.
[25] Duarte, T. y Jiménez, R. E. (2007). "Aproximación a la teoría del bienestar". *Scientia et Technica*, 13(37), 305–310.
[26] Espejel, A., González I. y Perón E. (2004) "El índice de deterioro ambiental en los municipios de Tlaxcala: Una propuesta metodológica", *Gaceta ecológica*, 70, 19-30.

[27] Färe, R., Grosskopf, S., Norris, M. y Zhang, Z. (1994). "Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries". *The American Economic Review*, 84(1), 66–83.
[28] Farrell, M. (1957). "The measurement of productive efficiency". *Journal of the Royal Statistical Society*. Series A (General), 120(3), 253–290.
[29] Garzón, H., Flores, S. y Flores, J. (2011). "Eficiencia técnica de instituciones públicas de educación secundaria del estado Barinas, Venezuela". *Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura*, 17(2), 149–165.
[30] Giménez, V. (2000). *Eficiencia en costes y calidad en la universidad. Una aplicación a los departamentos de la UAB* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.
[31] Gómez, J., Buendía, F., Solana, J. y García, J. (2003). "Estudio de la eficiencia de los centros de enseñanza secundaria de la ciudad de Murcia a través del Análisis Envolvente de Datos". *Revista de Investigación Educativa*, 21(1), 113–133.
[32] Gómez, J. (2001). "La evaluación de la eficiencia en las universidades públicas españolas". *X Jornadas de la Asociación de Economía de la Educación*, 411–434. http://www.economicsofeducation.com/wp-content/uploads/murcia2001/E01.pdf
[33] Goñi, S. (1998). "El análisis envolvente de datos como sistema de evaluación de la eficiencia técnica de las organizaciones del sector público: aplicación en los equipos de atención primaria". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 27(97), 979–1004.
[34] Harttgen, K. y Klasen, S. (2012). "A household-based human development index". *World Development*, 40(5), 878–899.
[35] Junca, G. (2018). "La persistencia de la inequidad y la desigualdad en la educación en Colombia". *PAPELES*, 10(19), 26–39.
[36] Lagravinese, R., Liberati, P. y Resce, G. (2020). "The impact of economic, social and cultural conditions on educational attainments". *Journal of Policy Modeling*, 42(1), 112–132.
[37] Liu, J., Lu, L., Lu, W. y Lin, B. (2013). "A survey of DEA applications". *Omega*, 41(5), 893–902.
[38] López-Torres, L. y Prior, D. (2020). "Long-term efficiency of public service provision in a context of budget restrictions. An application to the education sector". *Socio-Economic Planning Sciences*, 100946.
[39] Malmquist, S. (1953). "Index numbers and indifference surfaces". *Trabajos de Estadística*, 4(2), 209–242.
[40] Mariñez, F. y Garza, V. (2009). *Política Pública y democracia en América Latina. Del análisis a la implementación*. México: Miguel Ángel Porrúa.
[41] Martín, R. (2008). "La medición de la eficiencia universitaria: Una Aplicación del Análisis Envolvente de Datos". *Formación Universitaria*, 1(2), 17–26.
[42] Melo-Becerra, L., Hahn-De-Castro, L., Ariza, D. y Carmona, C. (2020). "Efficiency of local public education in a decentralized context". *International Journal of Educational Development*, 76, 102194.
[43] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2013). *Hacia la creación y consolidación de un plan de incentivos para docentes y directivos docentes del sector oficial, con miras al mejoramiento de la calidad de la educación en*

Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-345822_ANEXO_301.pdf

[44] MEN. (2017). *Plan Nacional Decenal de Educación 2016-2026. El camino hacia la calidad y la equidad*. https://siteal.iiep.unesco.org/bdnp/190/plan-nacional-decenal-educacion-2016-2026-camino-hacia-calidad-equidad

[45] Miranda, J. y Araya, L. (2003). "Eficiencia económica en las escuelas del MECE/Rural desde la perspectiva del Análisis Envolvente de Datos (DEA)". *Estudios Pedagógicos*, 29, 27–37.

[46] Moreno, L. (2008). "Evaluación de la eficiencia del gasto gubernamental en México. El caso de la educación primaria". *Región y Sociedad*, 20(41), 7–32.

[47] Murias, P., Martínez, F. y Novello, S. (2010). "Bienestar económico regional: Un enfoque comparativo entre regiones Españolas e Italianas". *Investigaciones Regionales*, 18, 5–36.

[48] Navarro, J. (2005). *La eficiencia del sector eléctrico en México*. México: ININEE-UMSNH.

[49] Navas, L., Montes, F., Abolghasem, S., Salas, R., Toloo, M. y Zarama, R. (2020). "Colombian higher education institutions evaluation". *Socio-Economic Planning Sciences*, 71, 100801.

[50] Organización de las Naciones Unidas para la Educación la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2017). *Rendir cuentas en el ámbito de la educación: cumplir nuestros compromisos*. United Nations. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000261016

[51] Ortegón, E. (2008). *Guía sobre diseño y gestión de la política pública*. http://repositorio.minciencias.gov.co/handle/11146/182

[52] Pena-Trapero, B. (2009). "La medición del bienestar social: Una revisión crítica". *Estudios de Economía Aplicada*, 27(2), 299–324.

[53] Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD). (2015). *Human Development Report*. https://www.undp.org/content/undp/es/home/librarypage/hdr/2015-human-development-report.html

[54] PNUD. (2016). *Informe Regional sobre Desarrollo Humano para América Latina y el Caribe*. https://www.latinamerica.undp.org/content/rblac/es/home/library/human_development/informe-regional-sobre-desarrollo-humano-para-america-latina-y-e.html

[55] PNUD. (2020). *Human Development Report 2020*. http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr2020.pdf

[56] PNUD. (2021a). *Human Development Data Center*. Human Development Reports. http://hdr.undp.org/en/data

[57] PNUD. (2021b). *Latest Human Development Index Ranking*. Human Development Reports. http://hdr.undp.org/en/content/latest-human-development-index-ranking

[58] Reimers, F. (1995). "Participación ciudadana en reformas de políticas educativas". *Pensamiento Educativo*, 17(2), 115–131.

[59] Rhodes, E. (1978). *Data envelopment analysis and related approaches for measuring the efficiency of decision-making units with an application to program follow-through in U.S. education*. Estados Unidos: Carnegie-Mellon University.

[60] Rojas, C. (2010). *Filosofía de la educación. De los griegos a la tardomodernidad*, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

[61] Sala-I-Martin, X. (2000). *Apuntes de Crecimiento Económico*. España: Antoni Bosch Editor.

[62] Sarmiento, A. (2010). *Situación de la educación en Colombia preescolar, básica, media y superior: Una apuesta al cumplimiento del derecho a la educación para niños, niñas y jóvenes*. Colombia: Educación Compromiso de Todos.

[63] Schultz, T. (1959). "Investment in man: An economist's view". *Social Service Review*, 33(2), 110-117.

[64] Seijas, A. (2005). "Análisis de la eficiencia técnica en la educación secundaria". *Estudios de Economía Aplicada*, 23(2), 299–322.

[65] Thanassoulis, E., Kortelainen, M., Johnes, G. y Johnes, J. (2011). "Costs and efficiency of higher education institutions in England: A DEA analysis". *Journal of the Operational Research Society*, 62(7), 1282–1297.

[66] Torres-Samuel, M., Vásquez, C., Luna, M., Bucci, N., Viloria, A., Crissien, T. y Manosalva, J. (2020). "Performance of Education and Research in Latin American Countries through Data Envelopment Analysis (DEA)". *Procedia Computer Science*, 170, 1023–1028.

[67] Venetoklis, T. (2002). Public policy evaluation: Introduction to quantitative methodologies. *VAAT Research Reports Helsinki (No. 90; VATT-TUKIMUKSIA)*. https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/148541/t90.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[68] Wolszczak-Derlacz, J. (2017). "An evaluation and explanation of (in)efficiency in higher education institutions in Europe and the U.S. with the application of two-stage semi-parametric DEA". *Research Policy*, 46(9), 1595–1605.

[69] Zamora, S., Monroy, L., Chávez, C. (2010) *Análisis factorial: Una técnica para evaluar la dimensionalidad de las pruebas.* Centro Nacional de evaluación para la educación superior. A.C.

[70] Zarzosa, P., y Somarriba, N. (2013). "An assessment of social welfare in Spain: Territorial analysis using a synthetic welfare indicator". *Social Indicators Research*, 111(1), 1–23.

Anexo

Tabla 1A
Evolución de los indicadores educativos en Colombia, 2007-2018

Departamento	Alfabetismo												Matriculación											
	Número de personas alfabetas mayor o igual a 5 años (Miles)												Número de alumnos en los cuatro niveles educativos (Miles)											
	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	4869	4925	5049	5112	5209	5220	5329	5469	5532	5631	5574	5519	1301	1297	1306	1287	1297	1260	1259	1065	1050	1035	1028	1002
Atlántico	1851	1894	1937	1968	1983	2013	2052	2096	2100	2139	2118	2097	511	508	514	502	514	509	507	496	491	493	508	506
Bogotá D.C.	6222	6336	6428	6514	6647	6731	6828	6911	7044	7172	7100	7029	1468	1465	1471	1459	1424	1403	1369	1331	1321	1295	1275	1249
Bolívar	1496	1527	1511	1578	1597	1617	1645	1670	1696	1726	1708	1691	513	511	515	506	491	487	478	448	420	448	453	448
Boyacá	1030	1033	1057	1061	1063	1073	1068	1095	1084	1099	1088	1077	283	282	284	279	275	269	265	220	216	217	214	213
Caldas	816	823	830	833	831	836	844	847	850	853	845	836	195	194	196	192	188	183	175	138	133	128	124	121
Caquetá	331	336	343	350	356	362	370	376	381	391	387	383	109	109	108	110	114	112	102	75	70	66	68	68
Cauca	1012	1028	1045	1054	1080	1091	1104	1121	1128	1156	1145	1133	302	302	302	301	305	298	295	242	236	244	247	243
César	714	723	729	734	754	768	784	798	810	834	825	817	263	263	263	262	266	267	273	245	242	246	251	254
Chocó	301	316	336	334	340	338	345	351	354	366	362	359	123	122	123	121	122	123	122	92	95	111	96	97
Córdoba	1110	1129	1146	1184	1188	1218	1263	1274	1335	1367	1353	1340	425	423	428	417	416	416	413	378	371	364	373	366
Cundinamarca	1993	2036	2092	2109	2143	2204	2221	2298	2320	2395	2371	2347	575	574	575	574	574	571	572	557	553	550	549	553
Huila	833	848	856	883	894	905	927	950	965	965	955	946	261	261	260	261	258	255	253	188	187	185	186	183
La Guajira	492	515	537	547	585	598	620	662	702	711	704	697	177	180	174	186	193	200	202	201	157	191	206	220
Magdalena	871	903	897	910	937	932	940	971	985	1006	996	986	341	341	341	341	342	337	340	309	289	293	310	315
Meta	673	687	703	709	731	751	769	789	806	829	821	812	207	207	207	207	212	214	216	186	195	190	191	190
Nariño	1249	1279	1295	1308	1324	1360	1390	1410	1419	1453	1439	1424	351	348	354	343	350	334	332	285	266	266	269	267
Norte Santander	1001	1017	1028	1040	1065	1081	1100	1115	1131	1145	1134	1122	309	308	310	305	296	296	294	254	251	248	251	255
Quindío	458	461	464	465	470	478	480	488	485	490	485	480	113	112	114	110	108	104	102	93	89	85	85	81
Risaralda	766	771	779	787	793	797	814	823	825	835	826	818	189	189	189	189	186	181	178	158	157	153	153	149
Santander	1643	1687	1698	1711	1719	1739	1760	1791	1787	1806	1788	1770	432	431	433	429	423	425	419	365	369	366	367	368
Sucre	566	585	586	603	611	616	629	638	648	664	657	651	236	234	237	232	234	227	221	199	199	203	202	206
Tolima	1110	1123	1117	1137	1149	1159	1157	1174	1185	1171	1159	1148	311	310	312	307	306	301	296	240	233	230	227	225
Valle del Cauca	3605	3653	3696	3741	3785	3844	3896	3942	3987	4060	4020	3980	916	911	921	900	905	884	881	804	786	748	733	721
Nacional	35012	35635	36159	36672	37256	37732	38335	39060	39557	40263	39861	39464	9908	9880	9936	9823	9800	9654	9563	8569	8377	8356	8370	8301

Fuente: Elaboración propia con base en datos del DANE (2021a) y DNP (2021).

Tabla 2A
Evolución de los indicadores educativos en Colombia, 2007-2018

Departamento	Docentes												Sedes educativas											
	Número de profesores en los cuatro niveles educativos												Cantidad de sedes en los cuatro niveles educativos											
	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	49.9	49.2	50.0	50.5	51.9	50.6	51.9	51.5	46.2	46.7	46.8	46.7	13.1	14.1	14.4	14.5	14.9	14.9	14.8	10.6	5.8	6.2	12.7	6.3
Atlántico	24.0	23.1	23.5	22.7	23.1	22.8	23.1	23.5	21.2	21.5	21.6	21.6	4.4	4.8	4.6	4.3	4.3	4.1	4.1	3.7	1.3	1.4	2.9	1.3
Bogotá D.C.	68.8	68.2	68.4	66.4	66.3	66.3	65.5	66.4	62.9	62.7	62.6	62.5	7.9	9.3	8.9	8.8	8.7	8.7	8.5	7.7	2.6	2.8	6.0	2.7
Bolívar	22.1	22.3	22.1	22.3	22.4	21.5	21.5	20.9	18.8	20.9	21.1	20.7	5.4	5.9	5.8	5.8	5.7	5.7	5.4	4.6	2.0	2.2	4.3	2.1
Boyacá	13.3	13.6	13.8	13.9	14.8	13.3	13.7	14.0	12.6	12.7	12.6	12.7	5.5	5.7	5.9	6.1	6.2	5.8	5.7	5.1	2.7	2.7	5.0	2.7
Caldas	9.5	9.2	8.9	8.7	8.5	8.8	8.8	8.7	8.0	7.9	7.9	7.9	3.3	3.5	3.5	3.4	3.4	3.3	3.2	3.0	1.4	1.5	2.7	1.4
Caquetá	4.9	5.0	5.2	5.3	5.3	4.9	4.9	5.1	4.6	4.7	4.7	4.7	2.8	3.0	3.1	3.1	3.2	3.1	2.9	2.9	1.5	1.6	2.8	1.6
Cauca	14.1	14.6	15.1	15.2	15.2	15.7	15.7	16.0	15.1	15.1	15.0	15.0	4.9	5.4	5.5	5.5	5.4	5.5	5.8	5.3	2.8	2.9	5.6	2.9
César	11.1	11.2	11.3	11.3	11.5	11.1	11.6	11.6	11.4	11.2	11.5	11.6	3.2	3.6	3.8	3.9	3.9	3.6	3.6	3.4	1.6	1.6	2.9	1.6
Chocó	5.0	5.6	5.9	6.2	6.7	6.0	5.7	6.3	5.9	6.5	6.3	6.2	1.9	2.0	2.1	2.2	2.4	2.5	2.6	2.1	1.3	1.3	2.3	1.4
Córdoba	16.6	16.1	16.6	17.0	17.2	16.9	17.1	17.3	17.4	17.8	18.0	18.0	5.0	5.3	5.4	5.6	5.5	5.4	5.3	4.7	2.2	2.3	4.7	2.2
Cundinamarca	25.3	25.9	26.6	26.8	27.3	27.4	28.0	28.5	27.5	27.3	27.6	28.1	7.8	8.6	8.7	8.7	8.7	8.7	8.7	7.9	3.8	3.9	7.4	3.9
Huila	11.0	11.3	11.5	11.3	11.3	11.4	11.7	11.9	10.9	11.1	11.1	11.1	4.2	4.6	4.6	4.6	4.6	4.5	4.5	4.1	2.0	2.0	4.0	2.0
La Guajira	5.8	6.1	6.3	7.0	7.5	8.4	9.2	9.9	9.4	9.4	10.1	10.4	1.2	1.4	1.4	1.4	1.4	1.8	2.3	2.2	1.1	1.1	3.0	1.7
Magdalena	15.3	15.0	14.7	14.5	14.7	14.7	14.1	15.2	13.6	14.2	14.7	14.8	4.1	4.5	4.2	4.0	4.1	4.1	4.1	3.5	1.8	1.7	3.5	1.8
Meta	8.2	8.1	8.3	8.6	9.0	9.4	9.7	9.5	9.0	9.2	9.2	9.3	2.8	3.0	3.1	3.1	3.2	3.2	3.2	2.9	1.5	1.5	2.7	1.5
Nariño	16.5	17.1	16.3	16.2	16.4	16.0	16.3	15.9	14.9	14.8	15.1	15.1	5.9	6.2	6.0	5.8	5.8	5.8	5.9	5.4	3.0	3.0	5.5	3.0
Norte Santander	14.2	14.0	14.1	13.2	13.2	13.0	13.0	13.1	12.9	12.9	12.9	13.0	5.1	5.3	5.3	5.1	5.1	5.2	5.3	5.0	2.5	2.6	4.8	2.6
Quindío	5.4	5.2	5.0	4.9	4.7	4.6	4.6	4.5	4.2	4.3	4.2	4.3	1.1	1.3	1.3	1.2	1.2	1.2	1.1	1.0	0.4	0.4	0.9	0.4
Risaralda	9.0	8.8	8.6	8.8	9.0	8.9	9.1	9.0	7.8	7.8	8.1	8.1	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7	2.6	2.7	2.4	1.1	1.1	2.1	1.1
Santander	20.6	20.8	21.5	20.8	21.1	21.4	21.3	21.7	20.1	20.1	20.1	29.7	7.2	7.7	7.8	7.9	7.9	8.1	7.9	7.1	3.5	3.5	6.7	3.5
Sucre	9.7	9.3	9.3	9.7	9.8	9.9	9.9	9.9	9.3	9.4	9.5	11.7	2.8	2.8	2.9	2.8	2.8	2.8	2.7	2.6	1.1	1.2	2.3	1.1
Tolima	13.8	14.2	14.0	13.9	14.4	14.3	14.4	14.5	13.4	13.5	13.5	18.1	4.9	5.5	5.9	6.0	5.9	5.7	5.8	5.3	2.5	2.6	4.9	2.6
Valle del Cauca	43.4	44.1	43.9	43.2	43.8	43.6	43.6	41.8	36.5	35.2	34.1	55.5	10.7	11.6	11.8	11.9	12.0	12.0	12.1	10.0	4.4	4.3	7.6	4.3
Nacional	438	438	441	437	445	441	445	362	414	417	418	419	117	127	129	128	129	128	128	113	54	55	107	55

Fuente: Elaboración propia con base en datos del DANE (2021a).

Tabla 3A
Evolución de los indicadores educativos en Colombia, 2007-2018

Departamento	Gasto Público en Educación Miles de Millones de pesos												Producto Interno Bruto (PIB) *per cápita* Millones de pesos											
	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	469	638	969	885	1055	900	1185	1182	1225	1284	1284	1284	12	12	12	13	15	16	16	18	19	20	21	22
Atlántico	151	203	194	189	115	185	272	267	281	276	276	276	8	9	9	9	10	11	12	14	15	16	17	17
Bogotá D.C.	473	621	846	1028	1085	1488	1715	1744	1794	1754	1754	1754	16	18	19	20	21	23	25	26	28	30	32	34
Bolívar	214	231	299	309	345	258	388	414	419	448	448	448	8	9	9	10	11	12	13	13	14	15	16	17
Boyacá	261	340	405	379	372	413	482	517	504	519	519	519	10	11	11	12	15	16	16	18	19	20	21	22
Caldas	127	168	235	190	161	179	252	247	280	281	281	281	8	8	8	9	9	10	11	12	13	14	15	16
Caquetá	85	111	124	126	122	110	144	159	151	147	147	147	4	5	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10
Cauca	166	246	323	256	302	419	444	502	611	548	548	548	5	5	6	6	7	8	8	9	10	11	12	12
César	112	209	246	432	193	275	313	422	379	388	388	388	8	10	10	11	13	13	12	12	13	15	17	18
Chocó	123	127	162	190	167	163	175	174	198	214	214	214	3	4	5	6	8	7	6	6	7	8	8	7
Córdoba	197	240	324	220	279	330	408	521	460	500	500	501	5	5	5	6	6	6	7	8	8	8	9	9
Cundinamarca	506	602	631	655	578	467	759	685	719	726	726	727	12	14	14	15	16	17	17	18	19	20	20	20
Huila	202	152	273	203	273	276	350	369	360	304	304	304	7	9	9	10	11	11	12	13	13	14	14	15
La Guajira	105	171	247	217	219	290	229	290	241	201	201	201	7	9	10	10	11	11	11	11	11	11	13	13
Magdalena	138	178	193	237	162	174	291	338	321	317	317	318	5	5	6	6	6	7	8	8	8	9	9	10
Meta	126	197	231	130	90	231	282	350	391	287	287	287	13	18	19	26	39	42	44	39	31	26	30	34
Nariño	204	318	309	351	376	391	413	416	478	495	495	496	4	4	5	5	5	6	6	7	8	9	9	9
Norte Santander	268	255	237	210	235	336	325	369	387	367	367	367	5	6	6	6	7	7	8	8	9	10	10	10
Quindío	67	68	91	62	84	97	118	131	120	122	122	122	7	7	8	8	9	10	10	11	12	13	14	15
Risaralda	86	88	122	88	98	110	134	149	164	194	194	194	8	8	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Santander	35	296	366	272	285	296	516	429	568	424	424	424	13	15	14	16	19	20	21	24	25	26	28	29
Sucre	118	144	188	165	170	181	287	285	316	318	318	318	4	4	5	5	5	6	6	7	8	8	9	9
Tolima	197	245	282	202	183	275	381	451	414	431	431	431	8	9	9	9	10	11	12	13	13	14	15	16
Valle del Cauca	329	404	525	386	471	555	663	562	675	613	613	613	11	11	12	13	13	14	15	16	18	19	20	21
Nacional	4759	6252	7821	7383	7418	8398	10525	10975	11455	11159	12224	11163	273	311	318	345	402	425	447	460	461	478	505	536

Fuente: Elaboración propia con base en datos del DANE (2021b) y el DNP (2021).

Tabla 4A
Evolución de los indicadores educativos en Colombia, 2007-2018

Departamento	Matriculación en Zona Urbana Número de alumnos en los cuatro niveles educativos (Miles)												Matriculación en Zona Rural Número de alumnos en los cuatro niveles educativos (Miles)											
	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	966	962	971	952	954	932	936	903	879	865	851	836	335	335	335	335	343	328	323	163	172	170	176	165
Atlántico	482	479	484	474	485	481	479	468	466	468	483	481	29	29	29	28	29	28	27	27	25	25	25	25
Bogotá D.C.	1459	1455	1464	1446	1414	1387	1355	1316	1307	1282	1263	1237	9	10	8	13	10	16	14	15	15	14	13	11
Bolívar	375	374	376	372	363	361	354	339	331	347	351	349	137	136	138	135	127	125	124	109	89	101	102	99
Boyacá	193	193	193	193	195	193	193	187	185	186	184	179	89	88	90	86	80	76	72	34	31	30	30	34
Caldas	140	139	141	138	135	131	126	124	120	115	111	109	55	55	56	54	53	51	49	14	13	13	13	12
Caquetá	60	60	59	62	63	64	59	60	59	57	58	58	49	49	50	48	50	48	43	15	11	9	10	10
Cauca	138	138	138	138	139	136	136	130	133	131	130	129	164	164	163	164	166	162	159	112	103	114	118	115
César	190	189	190	189	192	197	199	197	195	199	203	203	73	73	73	74	73	70	73	48	47	47	48	51
Chocó	67	66	68	64	65	65	61	58	64	67	62	62	56	56	55	57	58	58	60	34	31	44	34	36
Córdoba	226	225	228	223	222	222	224	217	221	222	223	225	199	197	200	194	194	194	190	161	150	142	150	142
Cundinamarca	409	409	408	410	410	410	407	411	410	402	406	412	166	165	166	164	165	161	165	146	142	148	144	140
Huila	162	163	162	163	160	158	157	155	153	149	148	147	98	98	98	98	98	97	96	33	34	36	38	37
La Guajira	107	109	105	113	109	111	113	114	106	109	107	111	70	71	68	73	85	89	89	87	51	82	99	108
Magdalena	224	225	224	226	228	231	235	223	212	215	224	227	117	116	117	115	114	106	105	85	76	79	86	88
Meta	161	161	161	161	164	167	169	160	170	166	164	164	46	46	46	46	48	47	47	26	26	24	26	26
Nariño	197	195	198	193	201	195	195	187	183	181	180	176	155	153	156	150	149	139	137	98	84	85	89	91
Norte Santander	242	240	243	238	231	234	230	230	228	224	227	230	67	67	67	67	65	62	64	24	22	24	24	25
Quindío	99	98	100	97	94	91	89	86	82	78	78	73	14	14	14	14	13	13	12	7	7	7	7	8
Risaralda	141	141	141	141	142	137	137	130	131	125	125	121	48	48	49	48	45	44	42	28	26	27	28	27
Santander	331	330	331	330	327	330	325	323	328	324	326	327	101	100	102	99	96	95	94	42	42	41	41	41
Sucre	155	154	156	152	154	149	145	134	138	140	141	143	81	80	81	80	81	77	77	66	61	63	62	63
Tolima	215	214	216	212	214	209	203	199	192	193	191	189	96	95	96	95	92	92	93	41	41	37	36	36
Valle del Cauca	786	781	790	772	774	756	753	709	697	667	645	635	130	129	131	128	132	128	127	95	88	81	88	86
Nacional	7525	7503	7547	7459	7436	7348	7281	7058	6991	6913	6881	6824	2383	2377	2390	2364	2364	2306	2282	1511	1386	1443	1487	1477

Fuente: Elaboración propia con base en datos del DANE (2021a).

Tabla 5A
Evolución de los indicadores educativos en Colombia, 2007-2018

Departamento	Docentes en Zona Urbana Número de profesores en los cuatro niveles educativos (Miles)												Docentes en Zona Rural Número de profesores en los cuatro niveles educativos (Miles)											
	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	38	37	37	37	38	37	38	37	33	33	33	33	12	12	13	13	14	14	14	14	14	14	14	14
Atlántico	23	22	22	21	22	21	22	22	20	20	20	20	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
Bogotá D.C.	68	67	68	66	66	65	65	66	62	62	62	62	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Bolívar	16	16	16	16	16	16	16	15	14	15	15	15	6	6	6	6	6	5	6	6	5	6	6	6
Boyacá	9	9	9	9	10	9	9	10	9	9	9	9	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4
Caldas	7	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Caquetá	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
Cauca	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
César	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Chocó	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Córdoba	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9
Cundinamarca	17	17	18	18	18	18	18	19	18	17	18	18	8	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10
Huila	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	4	4	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4
La Guajira	4	5	4	5	5	5	5	6	5	5	5	5	2	2	2	2	3	4	4	4	5	5	5	5
Magdalena	10	11	10	10	10	10	10	10	9	9	10	10	5	4	4	5	5	4	4	5	4	5	5	5
Meta	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Nariño	9	10	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	7	8	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7
Norte Santander	10	10	11	10	10	10	10	10	10	9	9	10	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Quindío	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Risaralda	7	6	6	6	7	6	7	7	6	5	6	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
Santander	15	16	16	15	16	16	16	16	15	15	15	15	5	5	6	6	6	5	5	6	5	5	5	15
Sucre	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	6
Tolima	10	10	10	10	10	10	10	10	9	9	9	9	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	9
Valle del Cauca	37	37	37	37	37	37	37	35	30	29	28	28	6	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	28
Nacional	333	333	334	328	332	329	331	331	302	303	303	303	105	106	107	110	113	111	114	116	112	114	115	154

Fuente: Elaboración propia con base en datos del DANE (2021a).

Tabla 6A
Evolución de los indicadores educativos en Colombia, 2007-2018

Departamento	Sedes Educativas en Zona Urbana Cantidad de sedes en los cuatro niveles educativos (Miles)												Sedes Educativas en Zona Rural Cantidad de sedes en los cuatro niveles educativos (Miles)											
	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	5.2	6.2	6.1	6.1	6.1	6.0	6.1	5.1	1.7	1.9	3.9	1.8	7.9	7.9	8.2	8.4	8.8	8.8	8.8	5.5	4.1	4.3	8.8	4.5
Atlántico	4.0	4.4	4.3	4.0	4.0	3.8	3.8	3.4	1.2	1.3	2.7	1.2	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.1	0.1	0.3	0.1
Bogotá D.C.	7.7	9.1	8.8	8.6	8.5	8.5	8.3	7.5	2.6	2.7	5.9	2.6	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
Bolívar	2.7	3.1	3.0	3.0	3.0	3.0	2.8	2.5	0.8	0.9	1.9	0.9	2.7	2.8	2.8	2.8	2.7	2.7	2.6	2.1	1.2	1.2	2.4	1.2
Boyacá	1.4	1.7	1.8	1.9	1.9	1.7	1.7	1.4	0.7	0.7	1.4	0.7	4.1	4.0	4.2	4.2	4.3	4.1	4.0	3.7	2.0	2.0	3.6	2.0
Caldas	1.0	1.2	1.2	1.1	1.2	1.1	1.1	1.0	0.4	0.4	0.7	0.4	2.2	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.2	2.0	1.0	1.0	2.0	1.1
Caquetá	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.4	0.2	0.2	0.3	0.2	2.4	2.6	2.6	2.6	2.7	2.5	2.4	2.5	1.4	1.4	2.5	1.4
Cauca	0.9	1.2	1.1	1.2	1.1	1.2	1.2	0.9	0.4	0.5	0.9	0.5	3.9	4.2	4.4	4.3	4.3	4.3	4.6	4.4	2.4	2.4	4.7	2.4
César	1.3	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.3	0.5	0.5	1.0	0.5	1.9	2.1	2.3	2.3	2.4	2.1	2.2	2.1	1.1	1.2	1.9	1.1
Chocó	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.2	0.2	0.4	0.2	1.5	1.5	1.6	1.7	1.9	2.0	2.2	1.8	1.1	1.2	2.0	1.2
Córdoba	1.3	1.6	1.6	1.6	1.6	1.5	1.5	1.3	0.5	0.5	1.1	0.5	3.7	3.8	3.9	4.0	3.9	3.8	3.8	3.4	1.7	1.7	3.7	1.7
Cundinamarca	2.7	3.4	3.5	3.5	3.4	3.5	3.4	2.9	1.3	1.3	2.6	1.3	5.0	5.2	5.2	5.2	5.3	5.3	5.3	5.0	2.5	2.6	4.9	2.6
Huila	1.2	1.5	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.1	0.5	0.5	0.9	0.5	3.0	3.1	3.1	3.2	3.2	3.1	3.1	3.0	1.5	1.5	3.1	1.5
La Guajira	0.6	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.7	0.3	0.3	0.6	0.3	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	1.0	1.4	1.5	0.8	0.8	2.4	1.4
Magdalena	1.8	2.1	2.0	1.9	2.0	2.0	2.0	1.7	0.7	0.7	1.5	0.8	2.3	2.4	2.2	2.1	2.1	2.1	2.1	1.8	1.1	1.0	2.0	1.0
Meta	1.1	1.2	1.3	1.3	1.4	1.4	1.4	1.2	0.5	0.5	0.9	0.5	1.7	1.7	1.8	1.8	1.9	1.9	1.9	1.8	1.0	1.0	1.7	1.0
Nariño	1.2	1.5	1.4	1.3	1.4	1.3	1.3	1.2	0.5	0.5	0.9	0.5	4.7	4.7	4.6	4.4	4.4	4.5	4.5	4.2	2.5	2.5	4.5	2.5
Norte Santander	1.7	2.1	2.0	1.9	1.8	1.9	1.9	1.7	0.7	0.7	1.4	0.7	3.3	3.2	3.4	3.2	3.3	3.4	3.5	3.3	1.9	1.9	3.4	1.9
Quindío	0.6	0.8	0.8	0.7	0.7	0.7	0.7	0.5	0.2	0.2	0.5	0.2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.2	0.2	0.4	0.2
Risaralda	1.0	1.2	1.2	1.2	1.3	1.2	1.3	1.1	0.4	0.4	0.8	0.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.2	0.7	0.7	1.3	0.7
Santander	2.6	3.0	3.0	3.0	3.1	3.1	3.1	2.5	1.0	1.0	2.1	1.0	4.6	4.7	4.9	4.9	4.9	5.0	4.9	4.6	2.5	2.5	4.7	2.5
Sucre	1.0	1.2	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1	0.9	0.4	0.4	0.7	0.4	1.8	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.6	0.7	0.8	1.6	0.7
Tolima	1.6	2.0	2.1	2.1	2.1	2.0	2.0	1.7	0.7	0.7	1.4	0.7	3.3	3.5	3.8	3.9	3.8	3.7	3.8	3.6	1.8	1.9	3.5	1.9
Valle del Cauca	7.1	8.0	8.2	8.2	8.3	8.3	8.3	6.9	2.8	2.7	4.6	2.7	3.6	3.6	3.6	3.6	3.7	3.7	3.8	3.1	1.6	1.6	3.0	1.6
Nacional	50.8	59.6	59.1	58.6	58.8	57.9	57.4	49.4	18.9	19.7	39.0	19.2	66.6	67.8	69.5	69.6	70.4	70.3	70.9	63.2	34.9	35.6	68.4	36.3

Fuente: Elaboración propia con base en datos del DANE (2021a).

Tabla 7A
Análisis factorial del Programa de Alfabetización

Matriz de correlaciones				
		Doc	Sede	PIBper
Correlación	Doc	1	0.792	0.374
	Sede	0.792	1	0.282
	PIBper	0.374	0.282	1
KMO y prueba de Bartlett				
Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin				0.633
Prueba de esfericidad de Bartlett		Chi-cuadrado aproximado		27.373
		Gl		6
		Sig.		0.000
Matriz de componentes				
			Componente	
			1	
Doc			0.903	
Sede			0.856	
PIBper			0.579	

Nota: Doc: docentes, Sed: Sedes educativas, PIBper: Producto Interno Bruto *per cápita*, y Método de extracción: análisis de componentes principales.
Fuente: Elaboración propia con base en datos de las tablas 1A a 6A del anexo, y utilizando el programa SPSS.

Tabla 8A
Análisis factorial del Programa Matricúlate Más

Matriz de correlaciones				
		Doc	Sede	PIBper
Correlación	Doc	1	0.792	0.374
	Sede	0.792	1	0.282
	PIBper	0.374	0.282	1
KMO y prueba de Bartlett				
Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin				0.561
Prueba de esfericidad de Bartlett		Chi-cuadrado aproximado		24.072
		Gl		3
		Sig.		0.000
Matriz de componentes				
			Componente	
			1	
Doc			0.924	
Sede			0.894	
PIBper			0.594	

Nota: Doc: Docentes, Sed: Sedes educativas, PIBper: Producto Interno Bruto *per cápita*, y Método de extracción: Análisis de componentes principales.

Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 1A a 6A del anexo, y utilizando el programa SPSS.

Tabla 9A
Análisis factorial del Programa de Equidad Rural (zona rural)

Matriz de correlaciones					
		PIBper	GPE	DocZR	SeduZR
Correlación	PIBper	1	0.288	0.091	0.054
	GPE	0.288	1	0.803	0.525
	DocZR	0.091	0.803	1	0.859
	SeduZR	0.054	0.525	0.859	1
KMO y prueba de Bartlett					
Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin				0.552	
Prueba de esfericidad de Bartlett		Chi-cuadrado aproximado		96.326	
		Gl		10	
		Sig.		0.000	
Matriz de componentes					
		Componente			
		1		2	
PIBper		0.303		0.902	
GPE		0.851		0.07	
DocZR		0.94		-0.256	
SeduZR		0.837		-0.327	

Nota: DocZR: Docentes zona urbana, SeduZR: Sedes educativas zona urbana, PIBper: Producto Interno Bruto *per cápita*, GPE: Gasto público en educación, y Método de extracción: Análisis de componentes principales.
Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 1A a 6A del anexo, y utilizando el programa SPSS.

Tabla 10A
Análisis factorial del Programa de Equidad Rural (zona urbana)

Matriz de correlaciones					
		DocZU	SeduZU	PIBper	GPE
Correlación	DocZU	1	0.963	0.276	-0.485
	SeduZU	0.963	1	0	-0.535
	PIBper	0.276	0	1	-0.282
	GPE	0.915	0.852	0.288	0
KMO y prueba de Bartlett					
Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin				0.701	
Prueba de esfericidad de Bartlett		Chi-cuadrado aproximado		147.514	
		Gl		10	
		Sig.		0.000	
Matriz de componentes					
		Componente			
		1			
DocZU		0.959			
SeduZU		0.949			
PIBper		0.42			
GPE		0.924			

Nota: DocZU: Docentes zona urbana, SeduZU: Sedes educativas zona urbana, PIBper: Producto Interno Bruto *per cápita*, GPE: Gasto público en educación, y Método de extracción: Análisis de componentes principales.
Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 1A a 6A del anexo, y utilizando el programa SPSS.

Tabla 11A
Cálculo de la eficiencia de los departamentos de Colombia en el Programa de Alfabetización, 2007-2018

DMU	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	1	1	1	1	1	1	0.984966	1	1	1	1	1
Atlántico	0.834718	0.863526	0.858609	0.879666	0.858241	0.864025	0.850445	0.848052	0.873207	0.863149	0.85855	0.85855
Bogotá D.C.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Bolívar	0.712354	0.701848	0.691835	0.708482	0.712813	0.730954	0.73192	0.750979	0.763389	0.699608	0.707285	0.707285
Boyacá	0.828773	0.785966	0.779057	0.766923	0.715981	0.778667	0.747962	0.732466	0.723315	0.727381	0.726072	0.726072
Caldas	0.935467	0.947095	0.962846	0.970521	0.977621	0.918517	0.914203	0.90644	0.892356	0.916988	0.919839	0.919839
Caquetá	1	1	0.705453	0.68379	0.677942	0.711388	0.712928	0.68715	0.703752	0.725323	0.711057	0.711057
Cauca	0.761971	0.728743	0.701768	0.694677	0.711839	0.67255	0.671645	0.657426	0.628058	0.641345	0.645565	0.645565
César	0.693439	0.677242	0.659249	0.657637	0.65439	0.672107	0.64627	0.642581	0.598639	0.626981	0.602054	0.602054
Chocó	1	0.632795	0.602851	0.558074	0.509574	0.54009	0.575302	0.524554	0.505635	0.480198	0.503589	0.503589
Córdoba	0.706615	0.719331	0.69624	0.694652	0.689844	0.698972	0.707074	0.690715	0.642951	0.642029	0.63505	0.63505
Cundinamarca	0.81742	0.796334	0.784532	0.782051	0.784689	0.779809	0.759837	0.759353	0.706722	0.727981	0.708585	0.708585
Huila	0.818074	0.783138	0.758484	0.789804	0.794485	0.76883	0.754452	0.746726	0.745949	0.730627	0.730359	0.730359
La Guajira	1	1	0.980285	0.917462	0.906732	0.689081	0.647089	0.629203	0.629399	0.635426	0.573781	0.573781
Magdalena	0.602558	0.622307	0.617971	0.629151	0.637098	0.614556	0.638344	0.598148	0.608361	0.59446	0.570949	0.570949
Meta	0.914836	0.904311	0.877208	0.834982	0.809635	0.770355	0.753886	0.776113	0.751515	0.762834	0.753011	0.753011
Nariño	0.798285	0.764944	0.803863	0.807527	0.806746	0.821086	0.817408	0.829962	0.799772	0.823191	0.803515	0.803515
Norte Santander	0.749978	0.749799	0.738195	0.788861	0.80824	0.804205	0.810425	0.796679	0.73789	0.742948	0.736982	0.736982
Quindío	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Risaralda	0.934652	0.933876	0.935037	0.905395	0.882268	0.869835	0.853001	0.851762	0.894559	0.910689	0.875172	0.875172
Santander	0.834549	0.826966	0.791751	0.820185	0.813859	0.784935	0.791914	0.776301	0.743099	0.747798	0.510052	0.510052
Sucre	0.63971	0.666919	0.64565	0.626914	0.626252	0.60448	0.604777	0.606306	0.590736	0.596788	0.485689	0.485689
Tolima	0.859547	0.81917	0.808412	0.819477	0.795196	0.786478	0.767514	0.761652	0.741874	0.729453	0.540637	0.540637
Valle del Cauca	0.859379	0.838882	0.842591	0.858812	0.860965	0.855122	0.856452	0.887384	0.915747	0.961023	0.625643	0.625643

Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 1A y 2A del anexo, y haciendo uso del programa MaxDEA.

Tabla 12A

Índice de Malmquist de los departamentos de Colombia en el Programa de Alfabetización, 2007 – 2018

DMU	Eficiencia Relativa	Cambio Tecnológico	Índice Malmquist	Tipo
Antioquia	1.000	1.246	1.246	Mejora
Atlántico	1.029	2.282	2.347	Mejora
Bogotá D.C.	1.000	2.119	2.119	Mejora
Bolívar	0.993	1.522	1.511	Mejora
Boyacá	0.876	1.261	1.105	Mejora
Caldas	0.983	1.299	1.277	Mejora
Caquetá	0.711	1.535	1.092	Mejora
Cauca	0.847	1.264	1.071	Mejora
César	0.868	1.395	1.211	Mejora
Chocó	0.504	1.581	0.796	Empeora
Córdoba	0.899	1.362	1.224	Mejora
Cundinamarca	0.867	1.263	1.095	Mejora
Huila	0.893	1.282	1.144	Mejora
La Guajira	0.574	1.345	0.772	Empeora
Magdalena	0.948	1.468	1.391	Mejora
Meta	0.823	1.336	1.100	Mejora
Nariño	1.007	1.257	1.265	Mejora
Norte Santander	0.983	1.264	1.242	Mejora
Quindío	1.000	1.156	1.156	Mejora
Risaralda	0.936	1.207	1.130	Mejora
Santander	0.892	1.257	1.121	Mejora
Sucre	0.924	1.465	1.354	Mejora
Tolima	0.843	1.266	1.067	Mejora
Valle del Cauca	1.158	1.263	1.463	Mejora

Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 1A y 2A del anexo, y haciendo uso del programa MaxDEA.

Tabla 13A
Cálculo de la eficiencia de los departamentos de Colombia en el Programa Matricúlate Más, 2007-2018

DMU	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Atlántico	0.868434	0.891145	0.907409	0.922784	0.948904	0.99391	1	1	1	1	1	1
Bogotá D.C.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Bolívar	0.876281	0.864438	0.895375	0.890622	0.877751	0.929602	0.945962	1	0.964621	0.936192	0.914614	0.927182
Boyacá	0.770615	0.752165	0.772297	0.775592	0.732916	0.82494	0.806315	0.72419	0.749515	0.760676	0.738655	0.739262
Caldas	0.719526	0.744476	0.811859	0.835379	0.861137	0.86695	0.842785	0.737185	0.736322	0.745967	0.715713	0.714043
Caquetá	1	1	0.872521	0.871375	0.90974	0.999888	0.918339	0.707341	0.698275	0.697856	0.705965	0.726698
Cauca	0.776707	0.756332	0.752226	0.766017	0.794022	0.771521	0.775598	0.69391	0.680401	0.7145	0.712565	0.705919
César	0.84258	0.843763	0.865516	0.892765	0.904946	0.99567	0.982294	0.976075	0.930423	0.985789	0.957455	0.967992
Chocó	1	0.846153	0.783745	0.771361	0.725881	0.87605	0.936018	0.702321	0.726437	0.798029	0.705106	0.752001
Córdoba	0.942356	0.961425	0.969864	0.948272	0.95767	1	1	1	0.92322	0.897015	0.888782	0.874789
Cundinamarca	0.851519	0.830257	0.820633	0.835742	0.839479	0.840438	0.842883	0.925355	0.875201	0.887658	0.871311	0.870347
Huila	0.843749	0.827293	0.84122	0.888386	0.899333	0.921072	0.898872	0.730099	0.753725	0.746868	0.738458	0.734797
La Guajira	1	1	1	1	1	1	0.962321	0.963885	0.73664	0.915634	0.90698	0.942482
Magdalena	0.81408	0.83278	0.869958	0.907619	0.918899	0.939706	1	0.944438	0.924892	0.913882	0.910797	0.925917
Meta	0.876781	0.890359	0.914912	0.911104	0.912608	0.943802	0.933163	0.911032	0.955584	0.939591	0.920749	0.928077
Nariño	0.781085	0.748373	0.819035	0.818503	0.843894	0.845798	0.844653	0.8224	0.77771	0.794984	0.7716	0.767153
Norte Santander	0.790481	0.798583	0.822271	0.888648	0.886739	0.93309	0.940276	0.893635	0.849558	0.853514	0.850546	0.858387
Quindío	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Risaralda	0.734152	0.757645	0.807783	0.811743	0.807988	0.854433	0.827762	0.81864	0.895551	0.904524	0.853447	0.847724
Santander	0.779169	0.769701	0.761615	0.802158	0.796645	0.801441	0.814177	0.785305	0.791396	0.791896	0.777905	0.552988
Sucre	0.85807	0.892418	0.934105	0.909297	0.938603	0.956347	0.943068	0.94221	0.949962	0.982791	0.951196	0.783392
Tolima	0.818937	0.796319	0.833815	0.851044	0.837348	0.861138	0.849536	0.764693	0.756468	0.756907	0.731626	0.534465
Valle del Cauca	0.820766	0.80412	0.818107	0.823606	0.833107	0.827677	0.838756	0.924111	0.941841	0.947954	0.957904	0.632842

Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 1A y 2A del anexo, y haciendo uso del programa MaxDEA.

Tabla 14A
Índice de Malmquist de los departamentos de Colombia en el Programa Matricúlate Más,
2007 – 2018

DMU	Eficiencia Relativa	Cambio Tecnológico	Índice Malmquist	Tipo
Antioquia	1.000	0.883	0.883	Empeora
Atlántico	1.151	1.541	1.775	Mejora
Bogotá D.C.	1.000	1.512	1.512	Mejora
Bolívar	1.058	1.098	1.162	Mejora
Boyacá	0.959	0.835	0.801	Empeora
Caldas	0.992	0.777	0.771	Empeora
Caquetá	0.727	1.105	0.803	Empeora
Cauca	0.909	0.862	0.783	Empeora
César	1.149	0.893	1.026	Mejora
Chocó	0.752	0.754	0.567	Empeora
Córdoba	0.928	0.964	0.895	Empeora
Cundinamarca	1.022	0.921	0.941	Empeora
Huila	0.871	0.826	0.719	Empeora
La Guajira	0.942	0.765	0.721	Empeora
Magdalena	1.137	0.994	1.130	Mejora
Meta	1.059	0.800	0.847	Empeora
Nariño	0.982	0.867	0.851	Empeora
Norte Santander	1.086	0.848	0.921	Empeora
Quindío	1.000	0.980	0.980	Empeora
Risaralda	1.155	0.952	1.100	Mejora
Santander	0.710	0.963	0.684	Empeora
Sucre	0.913	0.998	0.911	Empeora
Tolima	0.653	0.899	0.587	Empeora
Valle del Cauca	0.771	1.111	0.856	Empeora

Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 1A y 2A del anexo, y haciendo uso del programa MaxDEA.

Tabla 15A
Cálculo de la eficiencia de los departamentos de Colombia en el Programa de Equidad Rural, 2007-2018

DMU	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antioquia R	1	1	0.975654	0.947436	0.935741	0.934646	0.906866	0.480991	0.471145	0.474639	0.496757	0.463815
Atlántico R	0.693998	0.722626	0.74073	0.758913	0.834341	1	0.968525	0.823874	0.855684	0.977409	0.963498	0.972852
Bogotá D.C. R	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Bolívar R	0.786643	0.755838	0.796799	0.815484	0.781338	0.916982	0.853882	0.834222	0.700394	0.677883	0.667175	0.686248
Boyacá R	0.601767	0.578374	0.622673	0.626083	0.585444	0.713443	0.655876	0.324892	0.300879	0.313958	0.306962	0.33461
Caldas R	0.53997	0.541133	0.594713	0.646346	0.656962	0.771678	0.71171	0.218176	0.19844	0.215398	0.204502	0.194838
Caquetá R	0.559427	0.525371	0.578108	0.618095	0.662654	0.85769	0.78155	0.261938	0.192731	0.189041	0.186057	0.178531
Cauca R	0.71567	0.692685	0.680661	0.708855	0.729324	0.730524	0.71501	0.501004	0.434569	0.495395	0.521804	0.513147
César R	0.692466	0.68707	0.70002	0.761898	0.757927	0.936973	0.915646	0.640862	0.528015	0.611463	0.581541	0.605082
Chocó R	0.702796	0.627696	0.646106	0.643303	0.587001	0.800679	0.844297	0.445663	0.393711	0.52861	0.430079	0.44853
Córdoba R	0.906847	0.938189	0.951699	0.930059	0.911823	1	0.969406	0.859111	0.683323	0.654292	0.679673	0.650583
Cundinamarca R	0.684992	0.665845	0.682816	0.678582	0.671348	0.69021	0.690168	0.633723	0.550852	0.580954	0.562517	0.556173
Huila R	0.786902	0.755528	0.767518	0.823106	0.826253	0.909821	0.875538	0.311466	0.305374	0.327579	0.341852	0.332471
La Guajira R	1	1	1	1	1	0.993773	0.900082	0.866792	0.430419	0.705345	0.742605	0.797032
Magdalena R	0.766437	0.801905	0.858601	0.88875	0.886068	0.963568	1	0.732851	0.667399	0.674897	0.716228	0.735374
Meta R	0.558834	0.538448	0.58602	0.633879	0.66744	0.81431	0.818443	0.489674	0.445218	0.463286	0.459143	0.467306
Nariño R	0.701213	0.682492	0.737094	0.736389	0.737434	0.75338	0.757054	0.584751	0.453277	0.497588	0.497793	0.513822
Norte Santander R	0.523342	0.543861	0.587107	0.661436	0.674908	0.797779	0.805471	0.322471	0.262594	0.294381	0.28701	0.293752
Quindío R	1	1	0.569409	0.609466	0.8408	1	1	1	1	1	1	0.585127
Risaralda R	0.547622	0.53544	0.593156	0.637044	0.62543	0.755564	0.710542	0.521105	0.484373	0.524346	0.474759	0.457977
Santander R	0.603217	0.618558	0.612512	0.638353	0.628846	0.706888	0.686205	0.310809	0.300434	0.310878	0.310202	0.107925
Sucre R	0.686873	0.688324	0.742907	0.767784	0.757981	0.847266	0.829524	0.781627	0.658053	0.718628	0.685276	0.435779
Tolima R	0.69726	0.667894	0.71329	0.755682	0.741902	0.821688	0.811333	0.376223	0.343567	0.329713	0.321012	0.158669
Valle del Cauca R	0.677104	0.630848	0.68933	0.698979	0.717075	0.741425	0.72888	0.567341	0.539937	0.524991	0.562503	0.121094
Antioquia U	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Atlántico U	0.815309	0.835064	0.827584	0.855106	0.873617	0.883761	0.88526	0.88503	0.872177	0.890627	0.922093	0.930938
Bogotá D.C. U	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Bolívar U	0.865296	0.849309	0.868722	0.869726	0.857822	0.890621	0.908125	0.919005	0.888619	0.896398	0.907742	0.924473
Boyacá U	0.816476	0.775657	0.772884	0.793649	0.743711	0.84421	0.849998	0.816232	0.814885	0.837378	0.832795	0.83076
Caldas U	0.790318	0.789671	0.832821	0.8252	0.843021	0.858549	0.870576	0.877377	0.846005	0.879052	0.849515	0.838918
Caquetá U	0.954803	0.951908	0.824355	0.805454	0.796608	1	0.967571	0.996451	1	1	1	1
Cauca U	0.853531	0.799295	0.822665	0.794506	0.804811	0.812275	0.818587	0.834595	0.82858	0.850574	0.836671	0.842633
César U	0.864969	0.844242	0.852877	0.864753	0.872221	0.973757	0.977049	0.987418	0.932834	0.982799	0.979632	0.989206
Chocó U	1	1	1	1	0.985569	1	1	1	0.912708	0.938765	0.91136	0.917064

Córdoba U	0.963339	0.967603	0.955118	0.925384	0.934748	0.996028	1	0.979126	0.914584	0.948449	0.99273	0.974982
Cundinamarca U	0.907454	0.881262	0.854854	0.881397	0.885667	0.891606	0.889025	0.908824	0.862395	0.88458	0.898286	0.892608
Huila U	0.786315	0.751345	0.777044	0.832912	0.833706	0.881506	0.872615	0.886471	0.879549	0.887414	0.885156	0.884896
La Guajira U	0.991378	0.96196	0.910549	0.984182	0.932174	0.980427	0.960239	0.955229	0.843375	0.942644	0.902123	0.92826
Magdalena U	0.776862	0.766757	0.791016	0.846194	0.853408	0.890399	0.962816	0.910541	0.872232	0.883489	0.884795	0.901542
Meta U	0.910357	0.908054	0.902189	0.917101	0.909021	0.94216	0.940591	0.941651	0.960978	0.95423	0.948582	0.948037
Nariño U	0.91663	0.87225	0.941332	0.940671	0.951403	0.9816	0.964084	0.902006	0.877089	0.888425	0.929573	0.869086
Norte Santander U	0.846805	0.826226	0.836184	0.905749	0.88455	0.942085	0.956602	0.975803	0.900947	0.922069	0.942098	0.950487
Quindío U	0.890311	0.901205	0.938703	0.964825	0.947328	1	0.993999	0.998263	1	1	0.925607	1
Risaralda U	0.791199	0.796203	0.80488	0.789568	0.791091	0.846325	0.840513	0.825517	0.891824	0.918263	0.881136	0.87494
Santander U	0.814647	0.784611	0.777166	0.824969	0.813292	0.810817	0.829057	0.844607	0.825494	0.84305	0.85444	0.868215
Sucre U	0.909275	0.910916	0.93823	0.920351	0.920963	0.978808	0.962983	0.906102	0.938151	0.975601	0.959612	0.983319
Tolima U	0.808578	0.77726	0.807658	0.828691	0.807506	0.847354	0.835194	0.850212	0.821401	0.843445	0.835523	0.827248
Valle del Cauca U	0.832027	0.813368	0.816102	0.823474	0.826424	0.810399	0.826206	0.846058	0.853795	0.872686	0.894406	0.894809

Nota: U: Urbano y R: Rural

Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 4A, 5A y 6A del anexo, y haciendo uso del programa MaxDEA.

Tabla 16A
Índice de Malmquist de los departamentos de Colombia en el Programa Equidad Rural, 2007-2018

DMU	Eficiencia Relativa	Cambio Tecnológico	Índice Malmquist	Tipo
Antioquia R	0.464	0.918	0.426	Empeora
Atlántico R	1.402	0.809	1.134	Mejora
Bogotá D.C. R	1.000	1.427	1.427	Mejora
Bolívar R	0.872	0.825	0.719	Empeora
Boyacá R	0.556	0.765	0.425	Empeora
Caldas R	0.361	0.663	0.239	Empeora
Caquetá R	0.319	0.613	0.196	Empeora
Cauca R	0.717	0.877	0.629	Empeora
César R	0.874	0.705	0.616	Empeora
Chocó R	0.638	0.631	0.403	Empeora
Córdoba R	0.717	0.874	0.627	Empeora
Cundinamarca R	0.812	0.885	0.718	Empeora
Huila R	0.423	0.755	0.319	Empeora
La Guajira R	0.797	0.629	0.501	Empeora
Magdalena R	0.959	0.794	0.761	Empeora
Meta R	0.836	0.605	0.506	Empeora
Nariño R	0.733	0.852	0.624	Empeora
Norte Santander R	0.561	0.727	0.408	Empeora
Quindío R	0.585	1.307	0.765	Empeora
Risaralda R	0.836	0.632	0.529	Empeora
Santander R	0.179	0.872	0.156	Empeora
Sucre R	0.634	0.894	0.567	Empeora
Tolima R	0.228	0.824	0.187	Empeora
Valle del Cauca R	0.179	1.412	0.253	Empeora
Antioquia U	1.000	1.545	1.545	Mejora
Atlántico U	1.142	1.513	1.728	Mejora
Bogotá D.C. U	1.000	1.465	1.465	Mejora
Bolívar U	1.068	1.500	1.603	Mejora
Boyacá U	1.017	1.283	1.305	Mejora
Caldas U	1.061	1.451	1.541	Mejora
Caquetá U	1.047	0.988	1.035	Mejora
Cauca U	0.987	1.342	1.325	Mejora
César U	1.144	1.456	1.665	Mejora
Chocó U	0.917	1.095	1.004	Mejora
Córdoba U	1.012	1.608	1.627	Mejora
Cundinamarca U	0.984	1.351	1.328	Mejora
Huila U	1.125	1.331	1.497	Mejora
La Guajira U	0.936	1.796	1.682	Mejora
Magdalena U	1.160	1.295	1.503	Mejora
Meta U	1.041	1.352	1.408	Mejora
Nariño U	0.948	1.573	1.491	Mejora
Norte Santander U	1.122	1.357	1.524	Mejora
Quindío U	1.123	1.005	1.129	Mejora
Risaralda U	1.106	1.329	1.470	Mejora
Santander U	1.066	1.403	1.495	Mejora
Sucre U	1.081	1.461	1.580	Mejora
Tolima U	1.023	1.242	1.271	Mejora
Valle del Cauca U	1.075	1.155	1.242	Mejora

Nota: U: Urbano y R: Rural
Fuente: Elaboración propia con base en las tablas 4A, 5A y 6A del anexo, y haciendo uso del programa MaxDEA.

Ensayos Revista de Economía, 41(2), 135-168, Noviembre 2022
DOI: http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-2

UANL ®

ENSAYOS Revista de Economía

ensayos.uanl.mx

Facultad de Economía

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN □ FACULTAD DE ECONOMÍA □ CENTRO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

Optimización dinámica aplicada al acuífero de San Luis Potosí

Dynamic optimization applied to the San Luis Potosi aquifer

Leobardo Pedro Plata Pérez [*§]
Noraima Eréndira Rangel Sánchez
Pedro Isidoro González Ramírez

Información del artículo

Recibido:
24 agosto 2020

Aceptado:
11 julio 2022

Clasificación JEL:
D24; C51; C61; Q21; Q25

Palabras clave:
extracción óptima de agua; administración de acuíferos; optimización dinámica; demanda de agua; costos de extracción de agua; tarificación; San Luis Potosí

Resumen

Este trabajo usa teoría de control óptimo para determinar el nivel de extracción de agua, de un acuífero, de manera racional. La función objetivo evalúa el valor presente del beneficio social neto de la explotación a lo largo del tiempo. En el beneficio intervienen la demanda y los costos de suministrar agua. La restricción representa la dinámica de la cantidad de agua en el acuífero, dependiendo de los niveles extracción y recarga. El modelo se aplica al acuífero 2411 de San Luis Potosí utilizando información empírica del consumo de agua de la población perteneciente a la zona conurbada de la capital del estado. La condición inicial se deja como parámetro para analizar la posibilidad tanto de óptimo interior como de óptimo de esquina. El óptimo interior recomienda un nivel de extracción de 42,854 miles de metros cúbicos y un precio de 0.00003658 pesos por metro cúbico de agua. El acuífero se encuentra actualmente muy sobreexplotado. Para mantener la sustentabilidad del acuífero se recomienda revisar la normativa de las tarifas y mejorar la micro medición de los consumos para construir un modelo más preciso.

[*] Universidad Autónoma de San Luis Potosí, [§] lplata@uaslp.mx
ISSN Electrónico: 2448-8402 | ISSN Impreso: 1870-221X | ©2022 Los autores

Citar así: Plata Pérez, L. P., Rangel Sánchez, N. E., & González Ramírez, P. I. (2022). Optimización dinámica aplicada al acuífero de San Luis Potosí. *Ensayos Revista de Economía*, 41(2), 135-168, http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-2

Article information

Received:
24 august 2020

Accepted:
11 july 2022

JEL Classification:
D24; C51; C61; Q21; Q25

Keywords:
Optimal water extraction; Aquifer management; Dynamic optimization; Demand for water; Water extraction costs; Pricing; San Luis Potosi

Abstract

Optimal control theory is used to determine the level of water extraction, from an aquifer, in a rational way. The exploitation of the aquifer generates a net social benefit that represents the objective function. The benefit involves the demand and the costs of supplying water. The restriction represents the dynamics of the amount of water in the aquifer, depending on the levels of extraction and recharge. The model is calibrated with data on the 2411 aquifer of San Luis Potosi. Empirical information on water consumption of the population belonging to the metropolitan area of the state capital. The initial condition is left as a parameter in order to study the possibility of both an interior solution or a corner solution. The optimum interior recommends an extraction level of 42.854 thousand cubic meters and a price of 0.00003658 pesos per cubic meter of water. The aquifer is currently highly overexploited. To maintain the sustainability of the aquifer, it is recommended to review the tariff regulations and improve the micro measurement of consumption to build a more accurate model.

Introducción

En todo el mundo, el agua contenida en los acuíferos representa un recurso vital para la sobrevivencia de la especie humana. El agua es usada como insumo en diversas actividades productivas. Además, es vital para el aseo y consumo de los individuos en poblaciones y ciudades. La escasez de agua es un problema generalizado, debido a la sobreexplotación de los acuíferos. Diversos y múltiples factores confluyen en esta sobreexplotación, desde la ubicación del acuífero en zonas con poca recarga hasta el uso de tecnologías anticuadas; el aumento del volumen de consumo debido al crecimiento de la población, sobre todo en ciudades donde aumenta la industrialización y no hay una planificación adecuada. Otros factores importantes son los problemas en la regulación y cobro de tarifas, sitios clandestinos de extracción, desperdicio con fugas de agua por falta de mantenimiento, carencia de infraestructuras de captación en la temporada de lluvias, ubicación lejana de la fuente de agua, clima seco con grandes asentamientos humanos, problemas en la micro medición o mediciones irregulares a los grandes consumidores. Un factor muy relevante es el desperdicio debido a la falta de cultura ecológica. En general, se puede decir que se trata de un problema de planificación y control insuficiente, rebasado por necesidades y exigencias de corto plazo, sin considerar la sustentabilidad ni el largo plazo.

En la literatura del tema hay una diversidad de estudios desde diferentes ópticas. Hay estudios de carácter técnico sobre características físicas de los acuíferos, calidad del agua y duración de los mismos según la explotación a que son sometidos. Destacan los estudios que usan técnicas de optimización para analizar el uso racional del recurso. Más abajo se comentan algunos. También hay trabajos sobre estimación de demanda de agua a diferentes niveles y en diversas zonas geográficas. El tema del cobro del servicio y las tarifas para los diferentes usos y tipos de consumidores también ha sido estudiado.

Entre los estudios técnicos destaca el importante trabajo de Balek (1983, 1988) que brinda conceptos y teoría para estimar la recarga natural de los acuíferos. En Simmers (2013) se complementa el trabajo original y aparecen nuevos enfoques del tema. Siempre es importante conocer los niveles de agua a los que puede llegar un acuífero en determinado tiempo. Esto resulta muy importante para analizar el tiempo de duración de un acuífero en función de la cantidad de agua extraída del mismo. Los problemas ocasionados por la escasez de agua en los cultivos de trigo son señalados en Trnka et. al. (2019).

García Sánchez (2016) propone realizar una gestión adecuada de los acuíferos a través de un modelo llamado RENATA (Recarga Natural de Acuíferos). Presenta una definición y una actualización del estado hidrogeológico de dos acuíferos de la Provincia de Alicante en España. Guerrero-Martínez et. al. (2018) presentan un estudio sobre recarga natural para el caso de Aguascalientes. En el caso de San Luis Potosí, se cuenta con muy buena información sobre las condiciones físicas del acuífero en gracias a Segovia, Medellín, Moreno y Ávalos (2012), quienes analizan las condiciones físicas del acuífero y su oferta de agua, además estiman el tiempo de extinción bajo las condiciones de esa época. Carrillo-Rivera y Armienta (1989) analizan la contaminación inorgánica del agua del valle de San Luis Potosí. La calidad física y química del agua destinada al consumo humano se estudia en Ávalos, Alcántara y Luna (2008), también para el caso de San Luis Potosí.

Existen organismos oficiales que realizan estudios técnicos y cuentan con estadísticas sobre el tema del agua. Entre ellos destacan la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), el Instituto Mexicano de la Tecnología del Agua (IMTA) y la propia Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT). Se recomienda revisar el trabajo de Escolero, Gutiérrez y Mendoza (2017) publicado por el IMTA y la UNAM. El estudio describe las condiciones físicas de varios acuíferos de la República Mexicana. Sugiere aplicar algunas técnicas para el Manejo de Recarga de Acuíferos (MAR) y evitar la sobreexplotación de los mismos. Se describen ejemplos de acuíferos en México y el mundo. En CONAGUA y SEMARNAT (2014) aparece el plan de desarrollo hídrico como parte del Plan Nacional de Desarrollo. En

CONAGUA Y SEMARNAT (2018a) aparecen diversos datos estadísticos acerca del tema del agua en el caso de México.

Además de los estudios sobre las condiciones físicas e hidrológicas de los acuíferos, son también muy importantes los estudios sobre la demanda de agua y las tarifas para cobrar el consumo de la misma.

Entre los estudios que estiman demanda de agua destacamos el de Scheierling, Loomis y Young (2006) donde se calculan elasticidades de precio y demanda de agua para irrigación. García-Salazar y Mora-Flores (2008) estiman funciones de demanda del sector residencial de la Comarca Lagunera. Analizan los factores que influyen en la demanda y el papel de los precios. Concluyen que para reducir el consumo de agua se requiere incrementar el precio de la energía eléctrica. Encuentran que el costo de operación cobrado a través de la tarifa es bastante alto. Se destaca también el estudio de Soto, Ramírez-Fuentes y Maya (2012), realizado conjuntamente por el Centro de Investigación y Docencia Económicas, (CIDE A.C.) y la CONAGUA. Estiman factores y demanda de agua potable para el consumo doméstico en México. Usan una muestra de más de 6,500 viviendas pertenecientes a las localidades más pobladas del país. Toman en cuenta como factores al clima, los precios y los ingresos de los hogares. Plata y Rodríguez (2020) analizan la demanda y el costo de mantenimiento de un pozo en una comunidad de Mexquitic en San Luis Potosí. Se usa la teoría de bancarrota para proponer tarifas alternativas que mejoren la eficiencia en el cobro actual de tarifas.

Hay diferentes contextos para abordar el tema de las tarifas cobradas por el suministro de agua. En principio, la tarifa no solo depende de la cantidad de metros cúbicos consumidos de agua, es importante también el uso que se le da a la misma, la característica específica del consumidor, etc. Cázares Rivera (2007) presenta un comparativo de tarifas considerando los costos en los que incurre cada uno de los organismos operadores de la zona frontera México-EUA. El trabajo emplea índices para comparar tarifas, discute aspectos relacionados con la eficiencia técnica y comercial de los organismos operadores. Un trabajo interesante sobre precios racionales para el cobro del agua subterránea, en una situación de población creciente, es el de Amigues, Gaudet y Moreaux (1997).

El uso racional del consumo de agua ha sido también bastante estudiado. Utilizando métodos de optimización destacan los trabajos de Cabrera-Estupiñán y Dilla-Salvador (2011). A través de un modelo de programación lineal, revisando la cantidad extraída de agua de los acuíferos, proponen una solución para evitar la intrusión salina y satisfacer la demanda de agua de acuerdo con la recarga del acuífero. Amir y Fisher (1999), construyen un modelo de programación lineal para apoyar decisiones de planificadores en la producción agrícola, a nivel distrital y nacional. Encuentran la combinación óptima de actividades de consumo de agua que maximiza el ingreso neto de la

producción agrícola, dadas las demandas de agua a diferentes precios. Medellín, Mendoza, Howitt y Lund (2009) ofrecen un método basado en programación matemática para determinar la demanda económica del agua para uso agrícola.

Zilberman (1982) expone la metodología de optimización a través de teoría de control. Comenta que, para alimentar el modelo, se requiere una buena infraestructura de bases de datos que en aquel momento no se tenían. Señala también que, con el paso del tiempo, la tecnología iría avanzando y se podría aplicar este tipo de modelos a problemas reales arrojando una importante herramienta de predicción de la realidad, considerando aspectos de distribución y equidad. Roumasset y Wada (2010) consideran también la optimización dinámica usando teoría de control óptimo. La función objetivo incluye, en la función de costos, un factor para medir el costo de la desalinización. La recarga del acuífero se maneja como una función del nivel del mismo. Concluyen que, bajo ciertas circunstancias del modelo, la solución óptima es el valor mínimo de capacidad del acuífero. Rubio, Martínez y Castro (1994) maximizan el beneficio social de la extracción de agua de un acuífero a través de un modelo de teoría de control óptimo. En el modelo son fundamentales dos curvas: la de demanda de agua y la de costos de extracción del acuífero. El modelo considera también la evolución de las reservas del acuífero en función de la recarga natural y los niveles de extracción. La gestión óptima de las aguas subterráneas es abordada por Pardo, Castro y Martínez (1998). Comparan el sistema de regulación con el sistema no regulado en condiciones de libre mercado. La misma comparación es presentada para el caso de un acuífero de propiedad comunal por Rubio y Casino (2001). Los efectos de la demanda de largo plazo y la recarga, en la administración de un acuífero bajo condiciones de incertidumbre, es analizado por Rubio y Castro (1996). Recientemente, Zurita (2021) presenta un modelo de optimización dinámica en un contexto de turismo sustentable.

Estudios de optimización dinámica relacionados al uso del agua no han sido realizados hasta ahora, en la literatura consultada, para el caso de San Luis Potosí. En este trabajo estimamos y aplicamos un modelo de control óptimo con base en Rubio et. al. (1994). Se estima primero tanto una función de demanda como una función de costos medios. Ello permite postular una función dinámica de beneficios. El problema de control óptimo maximiza el valor presente de los beneficios, condicionado a una ecuación diferencial. En ella se describe la evolución de las reservas del acuífero en función de la recarga natural, los niveles de extracción y desperdicio de agua. El nivel de extracción se asocia con la variable de estado, y el precio asociado mediante la demanda constituye indirectamente la variable de control. El *stock* de agua está acotado entre un nivel mínimo y un máximo para garantizar la existencia

óptima. El modelo y sus variables se explican con detalle en la sección de metodología. El trabajo pretende dar respuesta a las siguientes interrogantes: ¿se puede estimar los costos relacionados con la oferta de agua y la demanda de agua en San Luis Potosí?, ¿se puede calcular un nivel de extracción y precio asociado al nivel de uso del recurso que maximice el beneficio social y mantenga sustentablemente el acuífero?, ¿el marco legal actual apoya a la vida eficiente del acuífero?

En el planteamiento se deja libre la condición inicial de extracción para permitir que la extracción óptima pueda estar en el interior o en la esquina del intervalo del *stock* de agua. La solución de la optimización permite calcular el nivel de extracción eficiente y el precio asociado con ese nivel. En los resultados se encuentra que el equilibrio es siempre condicionalmente estable y depende del nivel de extracción inicial. Las condiciones de transversalidad permiten caracterizar la trayectoria estable en cada caso. El caso más interesante es, tal vez, el de óptimo interior, para los fines iniciales de esta investigación. Se encuentra un nivel ideal de explotación de 42,854 miles de metros cúbicos y un precio p=0.00003658 pesos por metro cúbico de agua. Este nivel de extracción se puede interpretar, dados los costos y demanda estimada, como el ideal sustentable. En un entorno de este nivel, los precios se ajustarían asintóticamente al precio de equilibrio. Las soluciones de esquina y su interpretación se comentan con detalle en la sección de resultados.

En la sección 2 se describe brevemente el marco regulatorio y las condiciones de los acuíferos en San Luis Potosí. En la sección 3 se describe la metodología empleada para estimar la demanda, los costos medios y la optimización realizada. En la sección 4 se comentan los resultados y las limitaciones del estudio; además, se brindan algunas conclusiones y sugerencias para un trabajo futuro. Al final se incluye un apéndice con detalles de cálculos de la optimización.

1. Marco legal y acuíferos en San Luis Potosí

La Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos establece un marco para la administración de los recursos naturales. Los artículos 27, 115 y 124 fundamentan la regulación de las aguas. La Ley de Aguas Nacionales se deriva de los lineamientos constitucionales. Esta ley se aprobó en 1992 y ha sido modificada, mediante al menos seis decretos, con la intención de mejorarla y adaptarla a nuevas situaciones. En términos generales la ley rige el desarrollo, uso y protección de los recursos hídricos en todo el país. Con el fin de implementar los mandatos constitucionales, se crea un organismo federal específico para administrar y vigilar el desarrollo de los recursos hídricos. Este organismo conocido inicialmente como CNA se conoce hoy como CONAGUA. Una de las actualizaciones de la Ley de Aguas Nacionales

aparece en el DOF (2016). La versión legal actual de la regulación nacional se denomina Ley de Aguas Nacionales y su Reglamento y aparece en CONAGUA (2018c).

A partir de la reglamentación federal se establecen diversos Consejos de Cuenca a lo largo del país. Estos son los portavoces ante la CONAGUA de las condiciones y necesidades de la región que representan. Son los encargados de analizar las condiciones específicas de cada región con el propósito de mejorar la calidad del agua ofrecida a las poblaciones y lograr un manejo integrado y sustentable en cuencas y acuíferos. En 2012 los gobiernos de Nuevo León, Tamaulipas, San Luis Potosí y Zacatecas establecen un acuerdo denominado Reglas Generales de Integración, Organización y Funcionamiento del Consejo de Cuenca del Altiplano. El documento aparece en la página de Internet de la CONAGUA.

En consistencia con la legislación nacional, cada estado de la federación aprovecha su soberanía y tiene la facultad de emitir leyes y reglamentos específicos para su región. Cada uno expide las bases para la prestación del servicio público de agua potable, drenaje, alcantarillado, tratamiento y disposición de aguas residuales.

Para el caso que nos compete, en DOPSL (2016) aparece la Ley de Aguas de San Luis Potosí. El documento manifiesta explícitamente la escasez del agua, su desperdicio y la falta de conciencia por parte de la población para cuidarla de forma eficiente. Señala la importancia de conservar el vital líquido para las futuras generaciones.

A partir de las leyes se establecen políticas, normas y reglamentos a seguir para llevar a cabo la preservación del vital líquido. Un tema muy relevante es la regulación sobre la explotación de los acuíferos. Cuando una persona física o moral solicita la explotación de aguas subterráneas, se le solicitan mapas, dimensiones, uso para el cual va a ser aprovechado el acuífero, entre otros. La CONAGUA o la Comisión Estatal de Agua del Estado de San Luis Potosí (CEA) tienen la autoridad para evaluar la solicitud, deliberar con base a la disponibilidad media de agua en la zona a la que pertenece el acuífero en cuestión, para determinar si se otorga el permiso o no.

En el marco legal se considera también la determinación de las tarifas que se cobran a los usuarios del servicio de agua potable. En el Periódico Oficial del Gobierno del Estado Plan de San Luis (POGEPSL), el Decreto 594 establece la metodología para el cálculo de cuotas y tarifas para los Servicios Públicos de Agua Potable, Drenaje, Alcantarillado, Tratamiento y Disposición de sus Aguas Residuales en el estado de San Luis Potosí. El documento aparece en POGEPSL (2006). El Decreto considera, además de la cantidad de agua demandada entregada, costos de producción como la energía eléctrica, gastos

de operación, el incremento en el INPC (Índice Nacional de Precios al Consumidor) que impacta en los sueldos y prestaciones, depreciaciones, inversiones en la infraestructura para la extracción y costos financieros. Asimismo, en POGEPSL (2016) aparece el Decreto 409 donde se precisan aspectos considerados en el Decreto 594. Aparece la Ley de Cuotas y Tarifas para la Prestación de Servicios Públicos del Organismo Operador, INTERAPAS, en el caso de la zona conurbada de la capital de San Luis Potosí. Se describen las cuotas fijas y de servicio medido, se clasifican las mismas de acuerdo al tipo de zona ya sea popular, económica o residencial. Se puntualiza esta información porque constituye la base legal del ejercicio realizado en este trabajo.

El marco legal en cualquier país es sumamente importante para regular y garantizar el suministro del vital líquido a los hogares. Además de la regulación sobre la determinación de las tarifas, también se regula el mantenimiento y buen estado del acuífero bajo explotación y se señalan directrices para renovar o lograr concesiones de explotación, entre otros.

El agua que consumen los hogares se genera a través del ciclo hidrológico natural. El ciclo representa los cambios de estado que sufre el agua de nuestro planeta, de acuerdo con las condiciones del entorno climatológico de cada país, región o zona. Dentro de este proceso, a través de la caída de lluvia se recargan los acuíferos, de donde procede una buena parte del agua consumida. También puede provenir de deshielos o aguas superficiales recolectadas mediante diversos procesos. Destaca el caso de la que proviene de ríos, presas o lagunas. En CONAGUA y SEMARNAT (2018a) aparecen importantes estadísticas para el caso de México. El 6.4%, aproximadamente, de la precipitación total representa la recarga media de los acuíferos en México. En lo que sigue se describe el contexto actual del agua en San Luis Potosí, demarcación del objeto de estudio de este trabajo.

Ya se ha señalado que la gestión principal del agua en México corresponde a la CONAGUA. La cual ha dividido al país en 13 regiones hidrológico-administrativas. La capital de San Luis Potosí pertenece a la región VII, Cuencas Centrales del Norte. La región de la Huasteca potosina, que incluye a Ciudad Valles pertenece a la región IX denominada Golfo Norte. Asimismo, CONAGUA subdivide estas 13 regiones de la república mexicana en 653 unidades administrativas llamadas acuíferos. Estos constituyen la principal fuente de abastecimiento en zonas áridas y semiáridas en nuestro país, como es el caso de San Luis Potosí. Este tipo de zonas representan aproximadamente el 50% del territorio nacional. Los acuíferos soportan más de la tercera parte de la superficie regada para cultivos y abastecen aproximadamente el 75% del volumen utilizado en las ciudades. Una muy buena referencia para ver este tipo de datos estadísticos es CONAGUA y SEMARNAT (2018a).

Existen diversos problemas asociados con la explotación de los acuíferos. Entre ellos, la sobreexplotación, la contaminación o el incremento del precio de la energía eléctrica para extraer el agua, entre otros. La no atención temprana de estos problemas genera el deterioro o la extinción de los acuíferos.

La sobreexplotación de los acuíferos se mide como el cociente de la cantidad de agua extraída entre el nivel de recarga que tiene el acuífero de forma anual. Cuando este cociente es mayor a uno el acuífero se considera sobreexplotado. De los 653 acuíferos en México, el 16.4% se encuentran en grado de sobreexplotación, que va desde el 100% hasta el 400%. Para San Luis Potosí los acuíferos sobreexplotados representan el 47% del total. El acuífero al que pertenece la capital del estado presenta un 200% de sobreexplotación según datos del reporte presentado en CONAGUA y SEMARNAT (2018b).

Tabla 1
Disponibilidad media anual de agua subterránea de los acuíferos de San Luis Potosí en millones de metros cúbicos anuales

Nombre del acuífero	DMA	DNC	R	VCAS	Región
2411 San Luis Potosí	(76.4215)	-	78.1	154.5205	Centro
2402 El Barril	(65.5290)	-	31.6	88.5693	Altiplano
2408 Villa de Arista	(55.8843)	-	48.2	103.3164	Altiplano
2413 Matehuala - Huizache	(39.1294)	-	31.5	48.1336	Altiplano
2403 Salinas de Hidalgo	(32.5006)	-	16.7	27.4647	Altiplano
2417 Santa María del Río	(21.5930)	-	3.7	17.9748	Centro
2405 Ahualulco	(6.7555)	-	10.9	17.6555	Centro
2401 Vanegas - Catorce	(6.2174)	-	29.3	30.3498	Altiplano
2407 Cedral - Matehuala	(3.3532)	1.3	17.5	19.5492	Altiplano
2412 Jaral de Berrios - Villa de Reyes	0.9617	1.3	132.1	129.5236	Centro
2404 Santo Domingo	1.7116	-	21.4	13.8191	Altiplano
2406 Villa de Arriaga	2.2128	-	4.8	1.0846	Centro
2410 Buenavista	3.2977	-	27.1	18.5326	Zona Media
2414 Cerritos - Villa Juárez	5.7444	50.4	72.7	15.8754	Zona Media
2416 San Nicolás Tolentino	7.6398	18.6	32.9	5.6312	Zona Media
2409 Villa Hidalgo	10.4486	-	20.6	7.9864	Altiplano
2419 Tamuín	67.3462	290.2	370.1	6.2694	Huasteca
2415 Río Verde	68.8431	251.4	415.8	92.0308	Zona Media
2418 Huasteca Potosina	91.0203	541.5	668.2	26.2837	Huasteca

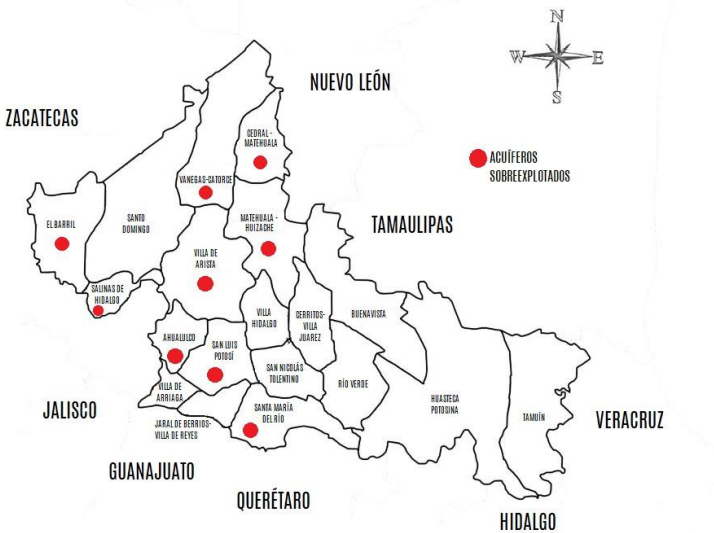
Fuente: elaboración propia con información de (CONAGUA, 2018b).

En la tabla 1 se muestra la disponibilidad media de agua (DMA) que es el resultado de restarle a la recarga total, la descarga natural comprometida y los volúmenes concesionados. La descarga natural comprometida (DNC) está formada por los volúmenes de agua procedentes de manantiales o de caudal

base de los ríos alimentados por el acuífero. Para el acuífero San Luis Potosí la descarga natural comprometida se considera prácticamente nula. La recarga total media anual (R) corresponde a la suma de todos los volúmenes que ingresan al acuífero en forma de recarga natural más la recarga inducida. La columna de VCAS corresponde a los volúmenes anuales de agua asignados, o concesionados, por CONAGUA mediante títulos inscritos en el Registro Público de Derechos de Agua (REPDA). La tabla 1 muestra la situación de los 19 acuíferos que pertenecen al estado de San Luis Potosí. Los acuíferos cuya DMA es negativa, aparecen en la primera columna de la tabla 1, con los números entre paréntesis. Generalmente se localizan en zonas áridas y semiáridas, por lo cual no cuentan con manantiales o ríos alimentados por el acuífero. El Estado de San Luis Potosí se divide en cuatro zonas o regiones de similitud geográfica: Zona Centro, Zona de Altiplano, Zona Media y Zona Huasteca. Los acuíferos sobreexplotados se encuentran generalmente en las dos primeras zonas. En las zonas Media y Huasteca aún no hay problemas de escasez de agua.

El Gobierno Federal ha establecido estrategias, en el Plan Nacional de Desarrollo del Programa Hídrico 2013-2024, que intentan mejorar la situación. Una de sus estrategias pretende ajustar las concesiones y asignaciones, tanto a la oferta y disponibilidad real de agua como a las prioridades nacionales. Entre otras estrategias, se actualizan los decretos de veda, reserva y zonas reglamentadas, se ordena la explotación y se ponen acciones para incrementar la recarga de los acuíferos.

Figura 1
Ubicación del acuífero 2411 de San Luis Potosí



Fuente: elaboración propia con base en Google Maps.

En la figura 1 se muestra con cierto detalle el área geográfica donde se ubica el acuífero 2411 de San Luis Potosí, objeto de estudio de este trabajo. Se puede observar que su extensión abarca los municipios de San Luis Potosí, Soledad de Graciano Sánchez y parte de Mexquitic de Carmona y Cerro de San Pedro.

En la tabla 2 se muestran los principales usos del agua del acuífero 2411 para la actividad económica, en cifras relativas. Se observa que el acuífero se usa mayormente para abastecer el consumo doméstico de los hogares.

Tabla 2
Usos del agua del acuífero 2411 de San Luis Potosí

Usos del agua	%
Público Urbano	66%
Agrícola	20%
Industrial	8%
Servicios	5%
Pecuario	1%
	100%

Fuente: elaboración propia con información de CONAGUA y SEMARNAT (2018b).

A partir de observar el déficit que presenta el acuífero de San Luis Potosí, y otros del norte del país, surge de manera natural la pregunta: ¿cómo es que se ha llegado a esa condición de sobreexplotación? Parece bastante claro que el incremento acelerado de la concentración de la población en zonas urbanas, el desarrollo tecnológico y el económico, son factores que contribuyen a un mayor consumo de agua. La CONAGUA señala que en el norte del país el clima afecta la disponibilidad del recurso. En los últimos años un grupo de agricultores, con capacidad económica importante, se expandió al norte del país construyendo, de forma incontrolada, pozos para su actividad económica. Esto ha incrementado considerablemente la situación de sobreexplotación de los acuíferos. Las reglamentaciones de CONAGUA tienden al cuidado y preservación del recurso, pero a veces los intereses económicos se sobreponen.

2. Metodología

En esta sección se explica y estima el modelo de control óptimo desarrollado por Rubio, Martínez y Castro (1994). El modelo es dinámico, pues sus variables se mueven a lo largo del tiempo. Plantea un problema de optimización dinámica para calcular la cantidad ideal de agua extraída de un acuífero, de forma que satisfaga los requerimientos de la demanda y sea viable,

tanto desde el punto de vista económico como ecológico. El modelo supone que la demanda de agua responde a leyes de mercado, hay precios que varían en función del agua demanda. También hay unos costos ligados a la extracción y provisión del agua. Con la demanda inversa y los costos promedio se calcula el beneficio neto social del acuífero. Como las variables son dinámicas, se utiliza una tasa de descuento para calcular el valor presente del beneficio social. Esto constituye la función objetivo de la optimización. La restricción de la optimización se plantea mediante una ecuación diferencial que describe los cambios de la cantidad de agua existente en el acuífero, en función esencialmente de la extracción y la recarga de agua que proviene de las lluvias.

El modelo formal aparece descrito y más explicado en las ecuaciones (7) y (8) más abajo. Para la aplicación empírica del modelo se requiere hacer una estimación econométrica, tanto de la demanda como de los costos.

Para estimar la demanda de agua se extrajo información relativa al consumo de agua de la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) para San Luis Potosí y Soledad de Graciano Sánchez en el año 2014. Para la obtención de costos de extracción se utilizó información contable del Organismo Operador Intermunicipal Metropolitano de Agua Potable, Alcantarillado, Saneamiento y Servicios Conexos de los Municipios de Cerro de San Pedro, San Luis Potosí y Soledad de Graciano Sánchez (INTERAPAS). Las características físicas del acuífero se obtuvieron de la actualización de disponibilidad media de agua del año 2018 reportado en CONAGUA y SEMARNAT (2018b). Con los datos señalados se tiene la base para la calibración del modelo. A continuación, se explican con mayor detalle las estimaciones realizadas.

2.1 Estimación de la función de demanda

Los principales factores que influyen en el consumo de agua doméstica son: precio, tamaño del hogar, ingreso familiar, clima y disponibilidad de drenaje conectado a la red pública. Se realizó un ejercicio similar al reportado por Soto, Ramírez y Maya (2012). Los datos empleados provienen de la ENIGH 2014. Como el diseño de la muestra es probabilístico, los resultados obtenidos se generalizan a toda la población bajo estudio en San Luis Potosí.

La tabla 3 presenta un resumen que describe la información utilizada de la ENIGH 2014. Aparece el número de viviendas, los metros cúbicos consumidos y el precio pagado por agua en pesos en 2014, por municipio. Para la estimación de la demanda se tomaron en cuenta 207 viviendas. La muestra de la encuesta cuenta con 608 registros en total, de los cuales 380 son urbanos y 220 rurales. El estudio considera solamente los urbanos pertenecientes al acuífero bajo análisis, porque cuentan con recibo de agua y el servicio es suministrado a través de un organismo operador o del municipio. Además,

cuentan con drenaje conectado a la red pública. Los municipios no considerados presentan cifras de precio pagado muy bajo y sin variaciones, lo que no permitía determinar el consumo de agua.

La encuesta presenta el importe total pagado por el recibo de agua. Esta cifra incluye el precio pagado por los metros cúbicos consumidos de agua más impuestos, mantenimiento, drenaje, alcantarillado y otros cargos. Para poder despejar el precio pagado por el consumo de metros cúbicos de agua se identificaron, en cada uno de los organismos operadores de los municipios, los porcentajes o cuotas fijas que correspondían a estos rubros. Dicha información se obtuvo del Periódico Oficial del Gobierno del Estado "Plan de San Luis" vigente al 2014. Se consideró también el descuento a las personas de la tercera edad, para poder reflejar el consumo efectivo sin el descuento. La frecuencia de pago del recibo en más del 70% de los datos se encuentra de forma bimestral. Para los municipios donde se cobra de forma mensual, se calcularon los metros cúbicos consumidos mensualmente y se duplicaron para obtener el consumo bimestral. En la tabla 3 se puede observar que los municipios de San Luis Potosí y Soledad de Graciano Sánchez representan el 74% del precio pagado y el 66% de los metros cúbicos consumidos.

Tabla 3
Número de viviendas, consumo en metros cúbicos y precio pagado por municipio, a pesos constantes de 2014

Municipio	Número de viviendas	%	Metros cúbicos	%	Precio pagado de agua	%
Ciudad Valles	20	10%	730	10%	$ 3,708	7%
Matehuala	27	13%	859	12%	$ 5,880	11%
San Luis Potosí	104	50%	3,769	51%	$ 29,889	58%
Santa María del Río	10	5%	385	5%	$ 963	2%
Soledad de Graciano Sánchez	33	16%	1,175	16%	$ 8,154	16%
Tamazunchale	13	6%	425	6%	$ 2,904	6%
Total	**207**	**100%**	**7,344**	**100%**	**$ 51,497**	**100%**

Fuente: elaboración propia con información de la ENIGH 2014.

Con la información proporcionada por la ENIGH 2014 se puede estimar el ingreso de las viviendas. La tabla 4 presenta la información del ingreso mensual de las viviendas por municipio y sexo. Se considera el ingreso corriente, proveniente de ingresos por trabajo, rentas, transferencias, estimación del alquiler y otros ingresos. Dicho ingreso ya considera pagos extraordinarios como el aguinaldo, utilidades, entre otros. Es importante considerar el ingreso anual total de la familia para evitar que afecte el consumo de agua estimado.

Tabla 4
Ingreso promedio mensual por municipio y sexo
(Pesos constantes 2014)

Municipio	Masculino	Femenino
Ciudad Valles	$ 10,757	$ 9,726
Matehuala	$ 12,615	$ 10,119
San Luis Potosí	$ 18,777	$ 15,087
Santa María del Río	$ 14,987	$ 15,301
Soledad de Graciano Sánchez	$ 11,203	$ 7,958
Tamazunchale	$ 9,440	$ 13,008

Fuente: elaboración propia con información de la ENIGH 2014

Otras características de la muestra de hogares encuestados son las siguientes: el 85% pertenece a la clase media alta y media baja, el 70% cuenta con dotación diaria de agua, el 98% cuenta con medidor de luz, el 54% tiene bomba de agua, 86% tinaco y 53% cisterna.

Otras variables necesarias para la estimación de la curva de demanda son la energía eléctrica, la precipitación pluvial y la temperatura. Para la obtención del consumo de energía eléctrica que provee la Comisión Federal de Electricidad (CFE) se consideró la misma encuesta de la ENIGH. Esta proporciona información sobre el último recibo de pago, correspondiente a la tarifa del mes de septiembre de 2014 obtenida de CFE (2014). Se contemplan tres niveles de consumo: hasta 150 kwh (kilowatt-hora), hasta 280 kwh y el excedente, para obtener el precio del kwh promedio. Al precio pagado por energía eléctrica se le descontó el Impuesto al Valor Agregado (IVA) y así se despejó el precio pagado por energía eléctrica.

Para obtener la precipitación pluvial y la temperatura se usaron datos de Weather Spark (2019). Se consideraron los promedios de los meses de junio, julio, agosto y septiembre que coinciden con la fecha del recibo reportado en la ENIGH.

La especificación funcional simplificada de la demanda de agua puede plantearse, entonces, con la ecuación (1). La tabla 5 describe el significado de las variables que aparecen en la forma funcional.

$$Q = f(P, I, TEMP, CE, PMA) \quad (1)$$

Tabla 5
Variables y fuente para estimar la demanda de agua

Variable	Descripción	Fuente
Q	Miles de metros cúbicos consumidos bimestralmente de agua	ENIGH
P	Precio por metro cúbico de agua	ENIGH y Periódico oficial del Gobierno del Estado de San Luis Potosi
I	Ingreso familiar mensual	ENIGH
$TEMP$	Temperatura media anual	(Weather Spark, 2019)
CE	Consumo de Energía Eléctrica	CFE
PMA	Precipitación media anual	(Weather Spark, 2019)

Fuente: elaboración propia con base en Soto et. al. (2012).

Para la estimación efectiva de la demanda se plantearon dos modelos. En el modelo (1) se tomaron en cuenta las variables de metros cúbicos consumidos, precio por metro cúbico, ingreso familiar, temperatura media anual, consumo de energía eléctrica y precipitación media. Sin embargo, las dos últimas variables no resultaron significativas por lo que se decidió realizar un nuevo modelo sin ellas. En el modelo (2) las tres primeras variables resultan significativas. Se observa que en general, un incremento del 10% en el precio marginal del agua, manteniendo todo lo demás constante, puede reducir la demanda en 13.88%. Adicionalmente, se observa que un incremento de 10% en el ingreso puede aumentar la demanda de agua en un 13.80%. Se encuentra que tanto la variable precio como el ingreso tienen los signos esperados y son significativas al 99% y 95% respectivamente. Por otro lado, se observa que la temperatura es significativa al 90%. Así, la función de demanda estimada se representa en la ecuación (2). La tabla 6 reporta las estimaciones de las dos especificaciones descritas.

$$Q = \frac{e^{0.265} I^{1.38}}{P^{1.39} TEMP^{2.37}} \tag{2}$$

Tabla 6
Resultados de la estimación de la demanda

Modelo	(1)	(2)
Variables	*ln Q*	*ln Q*
ln P	-1.505***	-1.388***
	(0.529)	(0.486)
ln Temp	-3.678*	-2.374*
	(1.825)	(1.386)
ln I	1.015*	1.380**
	(0.393)	(0.523)
ln CE	1.008	
	(1.982)	
ln PMA	0.44	
	(0.650)	
Constante	6.39	0.265
	(7.013)	(8.183)
Observaciones	207	207
R-cuadrada	0.300	0.282

Errores estándar robustos en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Fuente: elaboración propia en STATA con las fuentes descritas.

En la estimación sorprende que la elasticidad de la demanda respecto a la temperatura es negativa. Si la temperatura se incrementa en un 1%, el consumo de agua en metros cúbicos disminuye en 2.37% manteniendo fijas las demás variables. Hay que considerar que la zona de estudio pertenece a un clima seco, donde las tarifas de agua son más elevadas que en las zonas donde hay más humedad y mayor disponibilidad de agua. La muestra de la población pertenece a la clase media baja y media alta mayormente. Si se eleva la temperatura en principio se consume más agua. Pero la oferta disminuye tanto por el clima que impide que los acuíferos se llenen, como por el tandeo que pudiera hacer el organismo operador. El consumidor entonces raciona su uso de agua. De otro modo se ve en la necesidad de contratar servicios auxiliares para abastecerse de agua, como los son las pipas. Este hecho no lo contemplan los recibos del agua. Esta es la razón por la que la elasticidad es negativa.
A continuación, se muestra el procedimiento llevado a cabo para la estimación de la función de costos.

2.2 Estimación de la función de costos

Para determinar la función de costos de extracción del agua potable, se consideró nuevamente la información de INTERAPAS, el organismo operador

en la zona estudiada. El agua del acuífero se extrae a través de bombeo. A partir de los datos de los informes anuales de INTERAPAS se tienen los elementos necesarios para identificar los costos fijos y los variables. Se determinó que aproximadamente el 60% de los costos totales pertenece a los costos fijos. La base de la información usada proviene de INTERAPAS (2015) y BANXICO (2019). Con la primera fuente se obtienen los datos de extracción y costo en el periodo 2006-2014 y con la segunda los datos de la inflación anual del periodo analizado. La tabla 7 presenta esta información.

Tabla 7
Costos de extracción de agua e inflación 2006-2014 a pesos de 2014

Año	Metros cúbicos extraídos (miles)	% Variación	Costo total	Inflación anual
2014	98,650	-7%	$ 514,213	4.08%
2013	106,530	2%	$ 484,696	3.97%
2012	104,450	6%	$ 502,371	3.57%
2011	98,500	4%	$ 394,385	3.82%
2010	94,920	2%	$ 390,970	4.40%
2009	93,230	2%	$ 379,148	3.57%
2008	91,630	-3%	$ 388,618	6.53%
2007	94,230	2%	$ 362,744	3.76%
2006	92,200		$ 331,044	4.05%

Fuente: elaboración propia con datos de BANXICO (2019) e INTERAPAS (2015).

Con la información anterior se tienen los elementos para estimar la curva de costos. Es muy común plantear modelos de costos a través de funciones cúbicas donde el costo se encuentra en función de la cantidad producida. Si la función de costos totales es cúbica, $C(Q)= \alpha_0+\alpha_1 Q+\alpha_2 Q^2+\alpha_3 Q^3$, los costos medios tienen una expresión cuadrática. Si asumimos que para Q suficientemente alta el término α_0/Q del costo medio es muy pequeño, el costo medio que queremos estimar es una función cuadrática. Para verificar esta idea de manera empírica se realizaron varios ensayos. Con los datos de INTERAPAS (2015) se estimaron funciones de costo medio de tipo cúbico y de tipo cuadrático. Los mejores resultados se obtuvieron con el modelo cuadrático. La tabla 8 reporta los resultados de las regresiones. Se decidió representar los costos medios con el modelo cuadrático que aparece en la segunda columna. Se considera entonces el modelo de costo medio de la ecuación (2) siguiente donde Q representa la cantidad de metros cúbicos extraídos.

$$CMe(Q) = \beta_0 + \beta_1 Q + \beta_1 Q^2 \qquad (2)$$

Utilizando la información de la tabla 7 se obtienen las estimaciones robustas de los coeficientes de la curva de costos medios y se reportan en la tabla 8. En la tabla aparecen los niveles de significancia para cada uno de los coeficientes del modelo cuadrático.

Tabla 8
Resultados de las estimaciones de la curva de costos

Modelo	(1)	(2)
Variables	*C(Q)*	*C(Q)*
Q	-68.430	-7.33***
	(93.765)	(1.829)
Q^2	0.0013	0.0000877***
	(0.0018)	(0.0000189)
Q^3	-6.20E-09	
	(9.49E-09)	
Observaciones	9	9
R-cuadrada	0.933	0.925

Errores estándar robustos en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Fuente: elaboración propia en STATA e información de INTERAPAS (2015).

La función de costos medios estimada aparece en la ecuación (3), como sigue:

$$CMe(Q) = 298{,}724 - 7.33Q + 0.0000877Q^2 \quad (3)$$

El costo medio va decreciendo hasta el punto mínimo, alrededor de los 41,800 miles de metros cúbicos. Este punto representa de alguna manera la extracción eficiente ligada con el menor precio al que se puede ofrecer el producto sin incurrir en pérdidas. Cuando se extrae más agua el precio se tiene que incrementar, ya que el costo medio se incrementa. Cuando la cantidad de agua extraída anualmente supera el nivel de recarga anual del acuífero, este empieza a deteriorarse y aparece la sobreexplotación. Según la tabla 1, el acuífero de San Luis Potosí tiene una recarga anual de 78,100 miles de metros cúbicos anuales. La extracción anual supera ampliamente esta cifra.

Con las estimaciones de la demanda y costos medios podemos, ahora sí, plantear el problema de optimización dinámica y estimar su óptimo.

2.3 Modelo de control óptimo

En la teoría de control óptimo se buscan trayectorias de variables, limitadas por un sistema dinámico, que hagan máximo un determinado objetivo. Este se establece generalmente por medio de un funcional a maximizar que involucra parámetros, variables de control y variables de estado. En el caso del agua, las variables de control son las que pueden ser gestionadas por el administrador del recurso. Las variables de estado se refieren a los niveles del agua; el *stock* de agua en el tiempo depende tanto de las leyes de recarga de la naturaleza como de las políticas de extracción y uso del agua. Las variables de control inciden en las variables de estado y la forma en que se relacionan ambas variables se representa mediante un sistema dinámico, generalmente una ecuación diferencial en la que aparecen los dos tipos de variables. Se incorporan también condiciones de transversalidad que limitan las trayectorias o senderos para encontrar la trayectoria que optimiza la función objetivo del modelo. A través de condiciones iniciales se restringe también el horizonte de tiempo donde se realiza la optimización. En modelos de tipo económico también se considera un factor de descuento, con el fin de traer a valor presente las unidades monetarias del futuro. A continuación, se describe con cierto detalle el modelo usado.

2.4 Restricción dinámica

La cantidad de agua contenida en el acuífero se representa con la variable *x*, que será la variable de estado. Esta variable es implícitamente una función del tiempo, $x=x(t)$, por comodidad en la notación solo la expresamos con *x*. El crecimiento natural de la cantidad de agua lo representamos con la variable *R* que representa la recarga anual o crecimiento natural. Para hacer el modelo más simple vamos a suponer que esta *R* es constante. La restricción o sistema dinámico es $\dot{x} = R - (1 - \alpha)q$ donde q es el flujo de extracción de agua y α es un coeficiente de flujo de retorno[1]. Tanto α como q son variables que dependen del tiempo. La máxima capacidad de x es $\overline{x}$ y su valor mínimo es un valor $\underline{x}$ compatible con la supervivencia del acuífero. Notemos que la restricción dice que el nivel del *stock* aumenta cuando hay más recarga que uso y disminuye cuando hay más uso que recarga.

2.5 Costos

El costo promedio del bombeo de *x* unidades de agua está dada por $c(x)$, una función convexa y diferenciable de x. El costo promedio está acotado en el

[1] Son los volúmenes de agua que se reincorporan a la red de drenaje de la cuenca hidrológica provenientes del regadío y de los diferentes usos del agua.

dominio de los posibles niveles de extracción, que van desde cero al máximo nivel extraíble. El costo promedio siempre es no negativo y creciente al aumentar los niveles de extracción. Puede crecer, pero no de manera infinita. Esto se resume como sigue en las condiciones (4) y (5). Conviene aclarar que la q que aparece en (5) se refiere a la demanda de agua en el mercado. Esta demanda se satisface con la *x* extraída del acuífero, pero no son idénticas dado el posible desperdicio y efectos de recarga por parte de la misma agua extraída.

$$\lim_{x\to\bar{x}} c(x) \geq 0 \qquad \lim_{x\to 0} c(x) < \infty \qquad \lim_{x\to\bar{x}} c'(x) \geq 0 \qquad \lim_{x\to 0} c'(x) < \infty \tag{4}$$

$$\bar{x} \geq x \geq 0, \qquad q\varepsilon[0,\infty) \tag{5}$$

2.6 Demanda

Las preferencias de los consumidores generan una curva inversa de demanda $p(q)$ la cual es continuamente diferenciable. Se asume que la función es asintótica a los ejes. Con bajos niveles de extracción hay escasez y precios altos, con niveles altos de extracción hay mucha agua en el mercado y el precio se reduce.

2.7 Problema de optimización dinámica

La función objetivo se representa en (6), donde aparece el funcional a optimizar. La gestión eficiente de la administración debe maximizar el valor presente del beneficio social neto, el cual está definido como el excedente bruto del consumidor menos el costo promedio total. Para cada nivel de extracción, calculamos la "ganancia" como la diferencia entre el precio que se genera y el costo medio de cada unidad extraída. Las ganancias del futuro se traen a valor presente para determinar las trayectorias óptimas tanto de extracción como la variable de estado. La restricción de la optimización se representa en (7).

$$\max_{q} \int_{0}^{\infty} e^{-rt}[p(q) - c(x)]q \; dt \tag{6}$$

$$s.a. \;\; \dot{x} = R - (1-\alpha)q(p) \;\; ; \;\; x(0) = x_0 > 0 \;\; ; \;\; \bar{x} \geq x \geq 0, \;\; q\varepsilon[0,\infty) \tag{7}$$

Variable	*Definición*
p	precio del agua, variable de control
q	caudal de extracción, cantidad de agua extraída
p(q)	curva de demanda inversa, que es continuamente diferenciable y asintótica a los ejes, determina el precio cuando se extrae *q*
q(p)	función de demanda de agua

x	reserva de agua (nivel del acuífero), variable de estado
x_0	reserva inicial de agua
$c(x)$	función de costo promedio (diferenciable, convexa)
r	tasa de interés, tasa de descuento social
R	tasa de crecimiento (recarga)
α	coeficiente de flujo de retorno

Con los datos de la ENIGH y la metodología expuesta en los apartados anteriores obtenemos la estimación de demanda y costos, obteniendo para el modelo las siguientes variables a sustituir en el modelo y las curvas estimadas:

Variable	***Definición***
Ingreso	$14.04 miles de pesos
temp	17.5º Celsius
$\bar{x}$	78,100 m^3 (en miles)
r	10% tasa de descuento social
R	78,100 m^3 (en miles) anuales de recarga
α	6% de flujo de retorno

La tasa de descuento social es la propuesta por CONAGUA y SEMARNAT (2017) en su metodología para evaluación de proyectos socioeconómicos y de inversión.

El problema de optimización para la gestión óptima con los datos empíricos anteriores queda como sigue:

$$\max_{q} \int_{0}^{\infty} e^{-0.1t}\left[0.1266q^{\frac{-1}{1.39}} - (298{,}724 - 7.33x + 0.0000877x^2)\right] q\, dt \quad (8)$$

$$s.a.\dot{x} = 78{,}100 - 0.0532p^{-1.39}; x(0) = x_0 > 0; 78{,}100 \geq x \geq 0; q\varepsilon[0,\infty) \quad (9)$$

Los resultados de la aplicación al modelo se comentan abajo. Es importante notar que se asume que el nivel de recarga R es constante y coincide con el nivel máximo de posible extracción. La condición inicial x (0) se deja libre para poder analizar las posibilidades resultantes. Se analizan las posibilidades de óptimo interior y de óptimo en cualquiera de las dos esquinas. El desarrollo del procedimiento completo para llegar a las soluciones se encuentra en el apéndice. El lector interesado puede también consultar Rubio et. al. (1994) para mayores detalles.

2.8 Solución interior

En este caso se analiza la posibilidad de una solución interior, donde el óptimo se encuentre estrictamente entre los niveles mínimos y máximos del acuífero. Se tiene:

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0.00003658 \tag{10}$$

$$\dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = (47{,}578{,}625 - 1{,}140 + 0.000692733x^2)^{-1.39} \tag{11}$$

$$\hat{p} = 0.00003658 \tag{12}$$

La isoclina para el precio quedaría:

$$p = 6{,}023{,}454 - 144{,}317x + 0.0000877x^2 \tag{13}$$

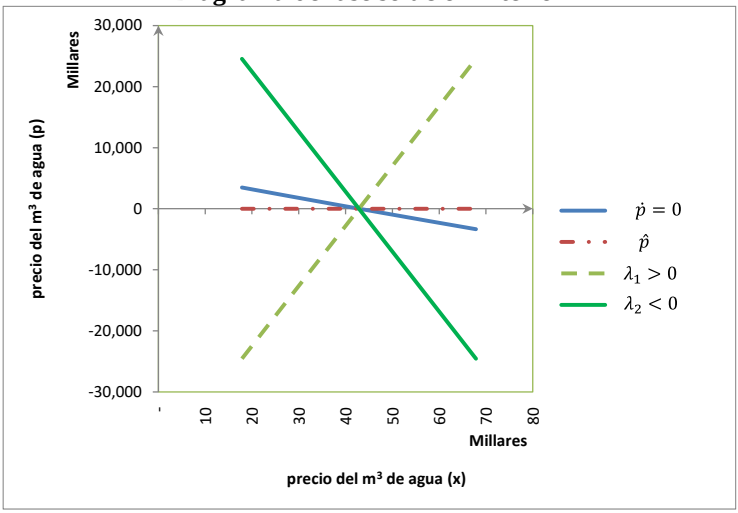
Ahora se obtendrán los valores característicos de acuerdo con el punto crítico $(\hat{p}, x^*)$ y se analizará su estabilidad. Se encuentran dos casos.

$x_1 = 1{,}602{,}725$	$\lambda_1 = 0.05 + 201{,}499i$ $\lambda_2 = 0.05 - 201{,}499i$	Es una espiral retractora	(14)
$x_2 = 42{,}854$	$\lambda_1 = 201{,}506 > 0$ $\lambda_2 = -201{,}506 < 0$	Es un punto silla	(15)

El caso $x_1 = 1{,}602{,}725$ corresponde a una espiral retractora que no es factible, además de no mostrar ninguna estabilidad. Es imposible un nivel del agua de 1,602,725 miles de m^3. El segundo caso corresponde a un punto silla. Se considera como una opción aceptable de equilibrio, puesto que indica que el nivel óptimo de extracción son 42,854 miles de m^3, siendo que la recarga máxima que se ha tenido es de 78,100 miles de m^3.

Como se menciona en el apéndice sólo hay un estado estacionario $(\hat{p}, x^*)$ con $0 < x^* < \bar{x}$, la trayectoria óptima conduce al estado estacionario. La trayectoria óptima se aproxima asintóticamente a él. Si la reserva inicial, dada a través de la condición inicial x_0, es más grande [menor] que la reserva en el estado estacionario, entonces el precio inicial es más bajo [más alto] que el precio del estado estacionario y el precio se incrementa [decrementa] a lo largo del camino óptimo como se muestra en la figura 2.

Figura 2
Diagrama de fase solución interior



Fuente: elaboración propia con datos de la ENIGH e INTERAPAS.

2.9 Solución esquina con $x^* = 0$

Este caso ocurre cuando se extrae la capacidad mínima del acuífero. Aunque la solución se establece como $x^* = 0$, cabe mencionar que el nivel de esta reserva inicial coincide con aquel nivel en donde no se encuentra en peligro la supervivencia del acuífero, ya que es el mínimo requerido para conservar la vida del mismo.

Entonces en este caso se tiene esta condición de transversalidad:

$$\lim_{x \to 0} \left[c(x) - \frac{R}{r} c'(x) \right] \leq \hat{p} \tag{16}$$

Se tiene:

$$\dot{x} = R - (1 - \alpha)q \tag{17}$$
$$\dot{p} = r(p - c) + c'R - (1 - \alpha)\eta^2 \quad con\ \eta^2 \geq 0 \tag{18}$$

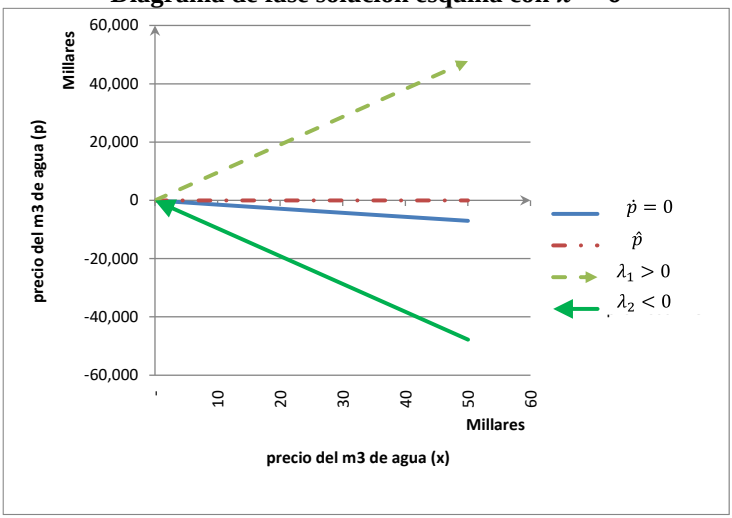
La función de la isoclina del precio es:

$$p = c - \frac{c'R - (1 - \alpha)\eta^2}{r} \tag{19}$$
$$p = 6{,}023{,}454 - 144{,}317x + 0.0000877x^2 - 9.4\eta_2 \tag{20}$$

El valor de η_2 será elegido para la isoclina p tal que intersecte a la isoclina $\dot{x} = 0$ en el punto $(\hat{p}, 0)$. El jacobiano no cambia ya que al derivar las funciones las η_i son constantes, por lo tanto, sigue siendo un punto silla el estado estacionario.

Es óptimo agotar físicamente las reservas de agua iniciales del acuífero o es óptimo explotarlo a la capacidad mínima compatible con la supervivencia del acuífero. En este caso solo tiene una trayectoria estable que conduce al equilibrio a partir de la condición inicial de nivel de reserva x_0 suficientemente cercana al equilibrio 0, como se muestra en la figura 3. Por lo que al llegar al punto mínimo de la reserva el sistema mantiene ese punto como equilibrio, no rebota por la trayectoria del autovalor mayor a cero.

Figura 3
Diagrama de fase solución esquina con $\dot{x} = 0$



Fuente: elaboración propia con datos de la ENIGH e INTERAPAS.

2.10 Solución esquina con $x^* = \overline{x}$

Cuando la solución sea la capacidad máxima de acuífero se tiene la siguiente condición de transversalidad:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left[c(x) - \frac{R}{r} c'(x) \right] \geq \hat{p} \tag{21}$$

Se tiene:

$$\dot{x} = R - (1 - \alpha)q \tag{22}$$

$$\dot{p} = r(p\ -\ c) + c'R + (1\ -\alpha)\eta_1 \qquad con\ \ \eta_1 \geq 0 \tag{23}$$

La función de la isoclina del precio es:

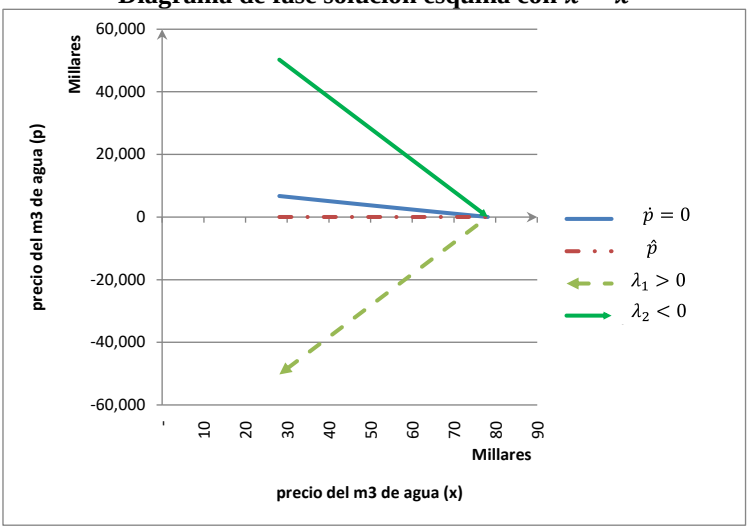
$$p = c - \frac{c'R + (1\ -\alpha)\eta_1}{r} \tag{24}$$

$$p = 6{,}023{,}454 - 144{,}317x\ +\ 0.0000877x^2 + 9.4\eta_1 \tag{25}$$

El valor de η_1 será elegido para la isoclina p tal que intersecte a la isoclina $\dot{x} = 0$ en el punto $(\hat{p}, \bar{x})$. El jacobiano no cambia ya que al derivar las funciones las η_i son constantes, por lo tanto, sigue siendo un punto silla el estado estacionario.

En este caso solo tiene una trayectoria estable que conduce al equilibrio, es óptimo explotar el acuífero a su máxima capacidad de almacenamiento. La dinámica del precio indica que va disminuyendo a medida que el nivel del acuífero se aproxima a su máximo nivel acercándose al precio de equilibrio, como se puede observar en la figura 4. Es importante comentar, como en el caso anterior, que lo anterior ocurre para condiciones iniciales x_0 suficientemente cercanas a la esquina de máxima capacidad del acuífero.

Figura 4
Diagrama de fase solución esquina con $\dot{x} = \bar{x}$



Fuente: elaboración propia con datos de la ENIGH e INTERAPAS.

3. Resultados, limitaciones y conclusiones

Se ha aplicado la teoría de control óptimo para analizar el problema de extracción y tarifación en el acuífero de San Luis Potosí. Ello ha implicado estimar una demanda y una función de costos de extracción y mantenimiento. Se han obtenido los siguientes resultados.

El análisis descriptivo de la información proveniente de la ENIGH, nos indica que los consumidores pertenecen a las clases sociales media alta y media baja. La pertenencia a estas clases sociales marca un comportamiento específico para el consumo de agua, evidentemente todos cuentan con un recibo que ampara el pago que realizan por los metros cúbicos consumidos de agua.

Para el cálculo de los costos, la información fue extraída del organismo INTERAPAS, quien administra y hace llegar el vital líquido a este sector de la población, en virtud de que el acuífero que administra este organismo abastece mayormente a la mancha urbana.

La función de demanda fue estimada de acuerdo con lo que marca la teoría económica en estos casos, es decir, como una función logarítmica. La cual resulta con una elasticidad positiva al ingreso, eso lo explicamos como una consecuencia del comportamiento de las clases sociales tomadas de muestra, ya que cambian las preferencias de consumo y en muchas ocasiones adquieren artículos para el hogar que pueden llegar a consumir un mayor número de metros cúbicos. Por otro lado, la cantidad de metros cúbicos consumidos depende negativamente tanto del precio como de la temperatura. Es obvio que se demande menos agua a medida que el precio aumente. Respecto a la temperatura nos indica que a medida que aumenta la misma, la demanda es menor. De primera impresión suena un poco ilógico que si hace más calor se consuma menos agua, pero lo observado con la estimación tiene una explicación. El clima en la capital de San Luis Potosí es semi árido, por lo que las tarifas son más costosas que en las zonas con mayor disposición de agua. Cuando aumenta el nivel de temperatura, el agua se evapora más fácilmente y empieza a escasear, el organismo administrador tandea el suministro del agua, al disminuir la disponibilidad de agua la población se ve obligada a recurrir a la compra de agua por pipas, lo cual no es registrado en el medidor de agua.

Para los costos se estudiaron nueve años derivados de los informes anuales del organismo, se aproximó el costo fijo promedio y posteriormente, después de varios ensayos, la función de costos variables medios queda estimada a través de una función cuadrática. Es una función continua, convexa y diferenciable en la cantidad extraída. Este costo representa los costos de extracción del agua a través de bombeo.

Con las funciones anteriormente mencionadas se describe el comportamiento de la demanda del agua de dicho acuífero y los costos de extracción de esta, las cuales son necesarias para alimentar el modelo de control óptimo. En la

optimización se maximiza el valor actual de la suma infinita del precio menos costo promedio, es decir, la diferencia entre ambas curvas a través del tiempo. La variable de estado es el nivel del acuífero y la variable de control es el precio del agua ya que este es determinado por el órgano administrador. La restricción describe la dinámica del nivel del acuífero en función de la extracción de agua y la recarga del mismo. La especificación de la optimización se deja con la condición inicial de la variable de estado como parámetro. Esto permite analizar las condiciones para óptimo interior o de esquina. En los tres casos se encuentra que el equilibrio es condicionalmente estable. Las condiciones de transversalidad permiten caracterizar la trayectoria estable en cada caso. Para los fines iniciales de esta investigación, tal vez el caso más interesante es el de óptimo interior. Se encuentra un nivel ideal de explotación de 42,854 miles de metros cúbicos y un precio p=0.00003658 de pesos. Más abajo se comentan las limitaciones y se abunda en la interpretación. Este nivel de extracción se puede interpretar, dados los costos y demanda estimada, como el ideal sustentable. En un entorno de este nivel, los precios se ajustarían asintóticamente al precio de equilibrio. Cuando inicialmente se extrae más que la cantidad de equilibrio, el precio resulta menor que el precio de equilibrio y tenderá a subir. Cuando inicialmente se extrae menos que la cantidad de equilibrio, el precio resulta mayor que el precio de equilibrio y tenderá a bajar hasta ajustar la demanda a la de equilibrio. Para el caso en que el equilibrio es el nivel mínimo del acuífero, al extraer muy poco el precio se va incrementando hasta llegar a su nivel máximo con nivel cero de extracción. Entre menos disponibilidad de agua, mayor es el precio. En el caso en que la solución de esquina es el máximo posible del acuífero, la solución se comporta de manera contraria al caso anterior. Como se parte de una condición inicial de extracción menor a la óptima, el precio inicial es alto, pero se va reduciendo en la medida en que van aumentando los niveles de extracción hasta llegar al óptimo consistente con la cantidad máxima de reserva y la demanda.

La interpretación dada es la consistente con la optimización realizada. Es natural preguntarse cuál de los posibles óptimos es el deseable. En el modelo ello depende de la condición inicial que dejamos abierta. Habría que decidir entre las dos esquinas y la solución interior. En un caso se consume agua al mínimo, se preserva la naturaleza, pero se vende muy cara. En el otro extremo se vende agua relativamente barata, pero se tiene la máxima extracción posible. La solución interior parecería más razonable y aceptable por las mayorías, haciendo una similitud con la regla del votante mediano.

En el modelo se hizo la hipótesis de que el nivel de recarga es el máximo nivel de extracción posible. Este nivel de extracción máxima posible no es fácil de obtener, al menos en datos oficiales. Esto es muy limitante. En el caso de San Luis Potosí, ya se comentó que el nivel de extracción actual supera al doble de

la recomendación de CONAGUA. La modelación misma también puede mejorarse, incorporando variables no consideradas y mejorando la especificación tanto de la condición inicial como del nivel máximo posible de extracción.

Otra de las limitaciones de este estudio se relaciona con la dificultad para encontrar micro medición de los consumos de agua doméstica. Una buena base de estos datos permitiría obtener una mejor estimación de la demanda y describir inclusive por segmentos de clase social la demanda de agua perteneciente a cada una de ellas. Si se pudieran estimar varias demandas se podría analizar una cantidad más importante de escenarios. Adicionalmente, se sabe que el 66% de la extracción del agua es para uso doméstico, lo cual nos deja un porcentaje que no es considerado dentro del modelo. Asimismo, respecto a los costos, hace falta contar con información más desagregada que permita diferenciar claramente los gastos fijos y los gastos variables.

Por lo que respecta al modelo, se podría adicionar variables como el crecimiento poblacional, y externalidades como la contaminación o intrusión salina. Se podría establecer una función específica de recarga del acuífero para poder describir mejor su comportamiento.

Dada la dificultad para calcular costos y demandas, sería ideal que los organismos oficiales ligados al tema del agua se coordinen mejor con el INEGI para proporcionar una buena base de datos públicos que permita hacer mejores estudios. Ello permitiría atender a tiempo la problemática relacionada con la sobreexplotación de los acuíferos.

Una conclusión, obtenida al analizar el tema, consiste en recomendar una evaluación y revisión seria de las tarifas de agua para distintos usuarios. Generalmente se actualizan con índices de inflación, pero se requiere algo menos superficial. Lo mismo ocurre con la concesión de derechos de agua, dada la sobreexplotación del acuífero. Es importante, también, mejorar las condiciones físicas del acuífero para ayudar a su recarga, construyendo sistemas de captación artificial e incrementando la plantación de árboles en los cerros, en lugar de construir casas y edificios. Factor también de mejora continua es la educación de la población, con campañas para evitar el desperdicio de agua.

Apéndice

En el presente apéndice se desarrolla la solución del problema de optimización planteado.

$$\max_{q} \int_{0}^{\infty} e^{-rt}[p(q) - c(x)]q \, dt \tag{1}$$

$$s.a.\ \dot{x} = R - (1-\alpha)q(p) \quad ; \quad x(0) = x_0 > 0 \quad ; \quad \bar{x} \geq x \geq 0, \quad q\varepsilon[0,\infty) \qquad (2)$$

Para resolver el problema se construye el hessiano, definiendo las funciones:

$$F = e^{-rt}[p(q) - c(x)]q \qquad (3)$$
$$G = [p(q) - c(x)]q \qquad (4)$$
$$f = R - (1-\alpha)q(p) \qquad (5)$$
$$H = F + \lambda f \qquad (6)$$

pero λ se redefine como $\lambda = \bar{\lambda}e^{-rt}$ quedando como sigue el hessiano a tiempo corriente:

$$\bar{H} = G + \bar{\lambda}f \qquad (7)$$

Por lo tanto, el lagrangiano quedaría:

$$L(x,q,\lambda,\eta^1,\eta^2) = \bar{H}(x,q,\lambda) + \eta^1(c^1 - g^1) + \eta^2(c^2 - g^2) \qquad (8)$$

Por el supuesto de la función de demanda se evitan las soluciones esquina de $q=0$ o ∞, por lo tanto, se obtendrán las condiciones suficientes y de transversalidad.

$$L(x,q,\lambda,\eta^1,\eta^2) = [p(q) - c(x)]q + \bar{\lambda}[R - (1-\alpha)q] + \eta^1(\bar{x} - x) + \eta^2(0 - x) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p - c(x) - \bar{\lambda}(1-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = c(x) + \bar{\lambda}(1-\alpha) \qquad (10)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial L}{\partial x} = r\bar{\lambda} + c'(x)q + \eta^1 - \eta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda} = \frac{-c'(x)q - \eta^1 + \eta^2}{r} \qquad (11)$$

$$\dot{x} = -\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} = R - (1-\alpha)q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{R}{(1-\alpha)} \qquad (12)$$

posteriormente se manejan las ecuaciones de p (10) y $\dot{\bar{\lambda}}$ (11) y obtenemos la siguiente expresión:

$$\dot{p} = r(p - c) + c'R + (1-\alpha)(\eta^1 - \eta^2) \qquad (13)$$

Las condiciones de transversalidad son las siguientes:

$$\eta_1 \geq 0 \quad (= 0\ si\ \bar{x} > x) \qquad (14)$$
$$\eta_2 \geq 0 \quad (= 0\ si\ x > 0) \qquad (15)$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt}\bar{\lambda}(t) \geq 0 \qquad \lim_{t\to\infty} e^{-rt}\bar{\lambda}(t) \geq 0 \qquad (16)$$

Si se considera una solución interior considerando los supuestos de transversalidad se tiene:

$$de \quad \dot{x} = 0 \ \ se\ obtiene \quad R - (1-\alpha)q(p) = 0 \tag{17}$$
$$de \quad \dot{p} = 0 \ \ se\ obtiene \quad r(p-c) + c'R = 0 \tag{18}$$

de la ecuación (17) el estado estacionario de p resulta:

$$\hat{p} = p\left(\frac{R}{1-\alpha}\right) \tag{19}$$

Asimismo, la función de la isoclina del precio es:

$$p = c - \frac{c'R}{r} \tag{20}$$

Esta condición nos indica que en el estado estacionario el precio es igual al efecto positivo de la recarga natural sobre el costo marginal de la extracción sobre la tasa de interés.

Por otro lado, se tiene:

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{\dot{p}=0} = c' - \frac{R}{r}c'' \qquad \forall x \in [0, \bar{x}] \tag{21}$$

De acuerdo con esto, habrá una solución en el intervalo $[0, \bar{x}]$ y será la única si:

$$\lim_{x\to 0}\left[c(x) - \frac{R}{r}c'(x)\right] > \hat{p} > \lim_{x\to \bar{x}}\left[c(x) - \frac{R}{r}c'(x)\right] \tag{22}$$

Para determinar su estabilidad se examinarán las raíces características:

Punto crítico: $E = (\hat{p}, x^*)$, siendo x^* la solución a la ecuación:

$$J_E = \begin{bmatrix} \dfrac{d\dot{p}}{dp} & \dfrac{d\dot{p}}{dx} \\ \dfrac{d\dot{x}}{dp} & \dfrac{d\dot{x}}{dx} \end{bmatrix}_{(\hat{p}, x^*)} \tag{23}$$

Valuando en el punto se obtienen las raíces características:

$$\lambda_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4(1-\alpha)q'(\hat{p})[-rc'(x^*) + c''(x^*)R]}}{2} > 0 \tag{24}$$
$$\lambda_2 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4(1-\alpha)q'(\hat{p})[-rc'(x^*) + c''(x^*)R]}}{2} < 0 \tag{25}$$

El radical es positivo; pero de las raíces, una es positiva y otra es negativa. Eso implica que la solución es un punto silla.

Referencias

[1] Amigues, J. P., Gaudet, G., & Moreaux, M. (1997). Rational pricing of groundwater with a growing population. *Environmental Modelling & Assessment*, *2*(4), 323-331.

[2] Amir, I. y F.M. Fisher, F. (1999). Analyzing agricultural demand for water with an optimizing model. *Agricultural Systems* 61(1), 45-56.

[3] Ávalos, R., Alcántara, C., Luna, R. (2008). "Evaluación de la calidad físico-química del agua en fuentes de abastecimiento de agua destinada al uso y consumo humano en el estado de San Luis Potosí", *Revista Red Sanitaria*, 4(13), 1-8.

[4] Balek, J. (1983). *Hydrology and water resources in tropical regions*. Elsevier.

[5] Balek, J. (1988). "Groundwater recharge concepts", in Simmers I. (ed.), *Estimation of Natural Groundwater Recharge*. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), Vol. 222. Springer, Dordrecht, 3-9.

[6] BANXICO. (2019). Inflación. Obtenido de http://www.anterior.banxico.org.mx/portal-inflacion/inflacion.html

[7] Cabrera-Estupiñán, H. y F. Dilla-Salvador (2011). Modelo de administración de acuíferos: MADA. *Tecnologías y ciencias del agua*, 2(4), 5-24.

[8] Carrillo-Rivera, J.J. y M. A. Armienta (1989). "Diferenciación de la contaminación inorgánica en las aguas subterráneas del valle de la ciudad de San Luis Potosí, SLP, México", *Geofísica Internacional*, 28(4), 763-783.

[9] Cázares Rivera, D. (2007). *Propuesta de estructura tarifaria de agua potable para los organismos operadores de los servicios de agua y drenaje en la frontera México-EUA*. Monterrey, Nuevo León, México: Centro de Estudios del Agua CEA, Banco de Desarrollo de América del Norte.

[10] CONAGUA y SEMARNAT (2017) Metodologías de Evaluación Socioeconómica y Estructuración de Proyectos de Inversión (Agua potable, Alcantarillado y Saneamiento) México: Comisión Nacional del Agua.

[11] CONAGUA y SEMARNAT (2018a) "*Estadísticas del Agua en México*". México: CONAGUA.

[12] CONAGUA, SEMARNAT. (2018b). "Actualización de la disponibilidad media anual de agua en el acuífero de San Luis Potosí (2411) Estado de San Luis Potosí". México: Diario Oficial de la Federación. 4/01/2018.

[13] CONAGUA (2018c). "Ley de Aguas Nacionales y su Reglamento", Comisión Nacional del Agua, México: Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT).

[14] CONAGUA, SEMARNAT. (2014). *Plan Nacional de Desarrollo. Programa Nacional Hídrico*. México: CONAGUA.

[15] DOF (2016). "Ley de Aguas Nacionales". Diario Oficial de la Federación. Decreto. Tomo DCCL, No.17. México: Diario Oficial de la Federación.

[16] DOPSL (2016) "Ley de Aguas para el Estado de San Luis Potosí", Diario Oficial Plan de San Luis, Decreto 476. San Luis Potosí, México: Gobierno del Estado de San Luis Potosí.

[17] García-Salazar, J.A. y J.S. Mora-Flores (2008). Tarifas y consumo de agua en el sector residencial de la Comarca Lagunera. *Región y Sociedad*, Vol. 20, No. 42, Págs. 119-132.

[18] García Sánchez, E. (2016). Caracterización hidrogeológica de los acuíferos de Aspe y la Horna. *Tesis doctoral*. Alicante, España: Universidad de Alicante.

[19] Guerrero-Martínez, Lilia; Hernández-Marín, Martín; Burbey, Thomas J. (2018), "Estimation of natural groundwater recharge in the Aguascalientes semiarid valley", *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas*, 35(3), 268-282, México: UNAM. https://doi.org/10.22201/cgeo.20072902e.2018.3.1022

[20] Escolero Fuentes, O., Gutiérrez Ojeda C. y Mendoza Cázares, E. (2017). *Manejo de la recarga de acuíferos: Un enfoque hacia Latinoamérica.* Jiutepec, Morelos, México: IMTA, UNAM.

[21] INTERAPAS (2015) Informes Anuales 2010-2015, Organismo Intermunicipal Metropolitano de Agua Potable, Alcantarillado, Saneamiento y Servicios Conexos. San Luis Potosí, México.

[22] Medellín Azuara, J., Mendoza, L., Howitt, R., & Lund, J. (2009). Un modelo calibrado de demanda de agua para uso agrícola para tres regiones en el norte de Baja California, *Agrociencia* 43, pp. 83-96.

[23] Pardo, F. J., Castro, J. P., & Martínez, C. (1998). Gestión óptima de aguas subterráneas: regulación frente a no regulación. *Revista Española de Economía*, 15 (1), pp. 085-121.

[24] Plata L. y D. Rodríguez (2020). Legislación y práctica en la provisión del servicio de agua: un estudio de caso a partir de la teoría de justicia distributiva. En E. Casares y L. Plata Pérez, *Teoría Económica Aplicada* (págs. 213-254). México: Universidad Autónoma Metropolitana.

[25] POGEPSL (2006) Periódico Oficial del Gobierno del Estado. Plan de San Luis. Decreto No. 594. Edición extraordinaria. Año LXXXVIX, Tomo II.

[26] POGEPSL (2016) Periódico Oficial del Gobierno del Estado. Plan de San Luis. Decreto No. 540. Edición extraordinaria. Año XCIX, Tomo II.

[27] Roumasset, J. y Wada, C. (2010). Optimal and sustainable groundwater extraction. *Sustainability* (2), 2676-2685. doi:10.3390/su2082676.

[28] Rubio, S. J., y Casino, B. (2001). Competitive versus efficient extraction of a common property resource: The groundwater case. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *25*(8), 1117-1137.

[29] Rubio, S. J. y Castro, J. P. (1996). Long-run groundwater reserves under uncertainty. *Investigaciones económicas*, 20 (1), pp. 71-88.

[30] Rubio, S., Martínez, C. y Castro, J. (1994). Optimal Management of Groundwater with Increasing Demand. *Revista Española de Economía*, 11 (Extra-1), 161-190.

[31] Scheierling, S., J. Loomis, J. y R.Young, R. (2006). Irrigation water demand: A meta-analysis of price elasticities. *Water Resources Research*, Vol. 42, W01411, 1-9. doi:10.1029/2005WR004009.

[32] Segovia Sánchez, O., Moreno Mata, A., Medellín Milán, P. y Avalos Lozano, J.A. (2012). *Análisis de la oferta de agua. Caso: San Luis Potosí (1992-2012).* San Luis Potosí, México: COLSAN.

[33] Simmers, I. (Ed.). (2013). *Estimation of natural groundwater recharge* (Vol. 222). Springer Science & Business Media.

[34] Soto, G., A. Ramírez Fuentes y L. Maya (2012). *Estimación de los factores y funciones de la demanda de agua potable en el sector doméstico en México*, CONAGUA, Reporte Técnico. DOI:10.13140/RG.2.1.1597.1365

[35] Trnka, M., Feng, S., Semenov, M. A., Olesen, J. E., Kersebaum, K. C., Rötter, R. P., ... & Büntgen, U. (2019). Mitigation efforts will not fully alleviate the

increase in water scarcity occurrence probability in wheat-producing areas. *Science Advances*, *5* (9), eaau 2406.

[36] Weather Spark. (2019). https://es.weatherspark.com/map?id=6140&pageType=1

[37] Zilberman, D. (1982). The use and potential of optimal control models in agricultural economics. *Western Journal of Agricultural Economics*, Vol. 7, pp. 1-12 395-405.

[38] Zurita, I. R. M. L. (2021). *Optimización dinámica en un modelo de turismo sustentable*. Tesis doctoral. México: Centro de Investigación y Docencia Económicas A.C.

Ensayos Revista de Economía, 41(2), 169-192, Noviembre 2022
DOI: http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-3

UANL ®

ENSAYOS Revista de Economía

ensayos.uanl.mx

Facultad de Economía

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN □ FACULTAD DE ECONOMÍA □ CENTRO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

Competencia oligopólica y comercio internacional: examinando la calidad de productos

Oligopolistic Competition and International Trade: Examining Product Quality

Michel Eduardo Betancourt Gómez*

Información del artículo

Recibido:
07 abril 2021

Aceptado:
05 octubre 2022

Clasificación JEL:
D43, L13, F12, F14

Palabras clave:
Organización Industrial; Comercio Internacional; Calidad de Productos

Resumen

En este documento, se propone examinar teóricamente el comercio de la calidad de productos con un marco de competencia oligopólica *a la* Hotelling, en lugar de un marco de competencia monopolística o competencia perfecta como es el estándar en la literatura del comercio internacional. Este marco permite identificar la calidad de los productos, al tiempo que captura simultáneamente la preferencia por la variedad y la preferencia por la calidad de los consumidores. Los resultados teóricos permiten construir dos índices que capturan la calidad a través de los precios y de las cantidades. Usando datos altamente desagregados a nivel producto, se prueban los índices y se presentan resultados sobre el comercio de la calidad, en productos y países seleccionados. Por ejemplo, México y Francia exportan calidad en el caso de los vinos, sin embargo, los indicadores muestran que los vinos de Francia poseen mayor calidad.

* Universidad Nacional Autónoma de México, michbetan@outlook.com
ISSN Electrónico: 2448-8402 | ISSN Impreso: 1870-221X | ©2022 Los autores

Citar así: Betancourt Gómez, M. E. (2022). Competencia oligopólica y comercio internacional: examinando la calidad de productos. *Ensayos Revista de Economía*, 41(2), 169-192, http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-3

Article information

Received:
07 april 2021

Accepted:
05 october 2022

JEL Classification:
D43, L13, F12, F14

Keywords:
Industrial Organization;
International Trade;
Product Quality

Abstract

This paper proposes to theoretically examine products' quality trade with an oligopolistic competition framework *a la* Hotelling rather than a monopolistic competition or perfect competition framework as is standard in international trade literature. This framework makes it possible to identify the quality of products while simultaneously capturing consumers' preference for variety and quality. The theoretical results allow the construction of two indices that capture quality through prices and quantities. The indices are tested using highly disaggregated data at the product level, and results on quality trade-in selected products and countries are presented. For example, Mexico and France export quality in the case of wines; however, the indicators show that French wines have higher quality.

Introducción

¿Qué motiva el comercio de un mismo producto entre países? Esta pregunta es la motivación principal de este artículo, pues su respuesta no resulta obvia. Y es que, si una economía exporta café, ¿qué hace que de igual forma importe café? La intuición inmediata podría contestar que esta economía exporta e importa café de diferente calidad; es decir, importa café *gourmet*, pero exporta café no-*gourmet*. Aun cuando el café pueda tener relativamente la misma calidad, los consumidores podrían no estar de acuerdo en sus preferencias sobre algún atributo o variedad asociada al café que consumen y, en este caso, la economía podría exportar café de empaque rojo o de la marca A, pero importar café de empaque azul o de la marca B.

Cuando los productos se distinguen por una calidad distinta, en este caso café *gourmet vs* café no-*gourmet*, se suele denominar diferenciación *vertical* de productos, en la literatura de la organización industrial (Pepall, Richards y Norman, 2014; Belleflamme y Peitz, 2010); y su comercio se denomina comercio intrasectorial *vertical*, en la literatura del comercio internacional (Brodzicki, Jurkiewicz, Márquez-Ramos y Stanislaw, 2020; Le Duc y Taegi, 2020; Ito y Okubo, 2012; Aturupane, Djankov y Hoekman, 1999; Greenaway, Hine y Milner, 1995). Cuando los productos se distinguen por atributos y variedades, y los consumidores poseen preferencias heterogéneas entre los productos aun cuando puedan poseer relativamente la misma calidad, en este caso, café de empaque rojo o de la marca A *vs* café de empaque azul o de la marca B, se denomina diferenciación *horizontal* de producto, en la literatura de la organización industrial (Pepall *et al*. 2014; Belleflamme y Peitz, 2010); y su comercio se denomina comercio intrasectorial *horizontal*, en la literatura del comercio internacional (Brodzicki *et al*., 2020; Ito y Okubo, 2012; Aturupane *et al*., 1999 y Greenaway *et al*., 1995).

La literatura que ha examinado teóricamente el comercio internacional de productos, diferenciados *horizontal* y *verticalmente*, ha proporcionado dos explicaciones. La primera está basada en el modelo de Falvey (1981), este tipo de modelos justifica el intercambio *vertical* de productos por una restricción de oferta entre las dotaciones iniciales de los países, en un contexto de competencia perfecta. Así, este modelo explicaría el intercambio entre café *gourmet* y café no-*gourmet*, pero no puede explicar el intercambio entre café de empaque rojo o de la marca A, y el café de empaque azul o de la marca B. Por otro lado, los modelos que asumen competencia monopolística y preferencia por la variedad (véase Cieślik y Wincenciak, 2018; Baldwin y Harrigan, 2011; Bernard, et. al., 2011; Melitz, 2003), justifican el intercambio de productos diferenciados *horizontalmente*, pero están limitados para explicar el intercambio de la calidad. Así, estos modelos explicarían el comercio del café de empaque rojo o de la marca A y café de empaque azul o de la marca B, pero están limitados para explicar el intercambio de café *gourmet* y café no-*gourmet*.

Los modelos que explican el comercio de la calidad bajo competencia perfecta, están limitados esencialmente porque la demanda no juega un factor relevante, y son solo las dotaciones de factores productivos, las que determinan el comercio de la calidad de los productos. Así, estos modelos no están considerando la preferencia de los consumidores por la calidad. Por otro lado, los modelos que asumen competencia monopolística tienden a asumir que las preferencias provienen principalmente de la preferencia por la variedad y, por lo tanto, esto tiende a debilitar la modelación de la preferencia por la calidad[1].

La literatura empírica que trata de medir el comercio intrasectorial *horizontal* y *vertical*, utiliza estos dos marcos teóricos por separado, para justificar sus resultados (Brodzicki *et al*., 2020; Azhar y Elliott, 2006; Schott, 2004; Aturupane *et al*., 1999; Greenaway *et al*., 1995). Esto representa una limitante pues utilizan simultáneamente dos teorías que asumen diferentes tipos de competencia para explicar sus resultados empíricos, siendo que podrían estar ligados a un tipo específico de competencia. En este artículo, se propone ofrecer un marco teórico unificado que pueda considerar simultáneamente el comercio de la calidad y el de la diferenciación *horizontal* de productos, asumiendo competencia oligopólica. La razón de utilizar un marco de

[1] Estos dos tipos de modelos provienen de dos tradiciones teóricas en el comercio internacional, la "vieja" teoría del comercio internacional, que se inspira dentro de los modelos tipo Heckscher-Ohlin, y asumen competencia perfecta; y la "nueva" teoría del comercio internacional, que viene de la tradición de Krugman (1979), y asumen competencia monopolística. Como ejemplos recientes véase Costinot y Rodríguez-Clare (2014), para un modelo de comercio internacional que asume competencia perfecta; y Betancourt, (2021) para un modelo de comercio internacional que asume competencia monopolística.

competencia oligopólica, en lugar de un marco de competencia perfecta o competencia monopolística, se debe principalmente a tres motivos. En primer lugar, como argumentan Leahy y Neary (2020), se ha explorado poco teóricamente sobre el comercio internacional en mercados oligopólicos, siendo que existe evidencia de que el comercio está dominado por grandes empresas (véase Mayer y Ottaviano, 2008; Freund y Pierola, 2015).

La segunda razón se debe a que, tanto la competencia perfecta como la competencia monopolística asumen que las firmas están atomizadas y, por lo tanto, no tienen comportamientos estratégicos emanados de la interdependencia. Como argumenta Neary (2016), no considerar la interdependencia estratégica en el comercio internacional implica que las acciones de un gran competidor no van a tomarse en cuenta por otras empresas, siendo que Gabaix (2011) y Di Giovanni y Levchenko (2012) muestran la existencia de comportamientos interdependientes. La tercera razón se debe a que la presencia de economías de escala podría generar oligopolios naturales, es decir, mercados con un número limitado de empresas. En los modelos de competencia monopolística, se asume libre entrada simultáneamente con la presencia de economías de escala, siendo que existen resultados teóricos, que indican que incluso una cantidad insignificante de economías de escala es suficiente para que la entrada sea rentable, solo para un número limitado de empresas (véase Belleflamme y Peitz, 2010, p.123). Esta situación es más evidente cuando se introduce la calidad o diferenciación *vertical* de productos (véase Belleflamme y Peitz, 2010, p.124).

La literatura que estudia teóricamente el comercio internacional con un marco de competencia oligopólica (véase Eaton y Grossman, 1986; Lahiri y Ono, 2003; Zhou, 2010; Neary, 2016; Nakanishi, 2018; Leahy y Neary, 2020) se ha centrado en usar modelos tipo Cournot o Bertrand. Sin embargo, el modelo oligopólico de Hotelling puede resultar una opción igualmente relevante, pues permite examinar precisamente la diferenciación *horizontal* y *vertical* de un bien capturando simultáneamente la preferencia por la variedad y la preferencia por la calidad. Hasta donde pudimos revisar, no se han elaborado modelos teóricos de comercio internacional usando el modelo de Hotelling. Podemos aproximar dos motivos de su poco uso, el primero puede deberse a que los modelos citados usan el modelo de Bertrand para examinar la competencia en precios, lo que también les permite examinar la competencia en cantidades tipo Cournot, con una misma construcción analítica, sin embargo, la competencia en cantidades puede resultar complicada de examinarse y compararse con el modelo de Hotelling a partir de una misma construcción analítica. El otro motivo es que el modelo de Hotelling es usado principalmente como un modelo de localización espacial, lo que puede complicar su modelación o interpretación, para el caso específico del comercio internacional.

Parte de la innovación de este documento radica precisamente en examinar teóricamente el intercambio de la variedad y de la calidad de los productos con un marco de competencia *a la* Hotelling. Para solucionar los problemas del uso del modelo en el comercio internacional descritos en el párrafo anterior, simplemente, vamos a centrarnos exclusivamente en considerar la competencia en precios y vamos a interpretar la localización espacial del modelo como lo hacen Balart (2021), Aydinonat y Köksal (2019), Zhang, Yixue, Zhang, y Shuai (2018) y Kim (2012), quienes interpretan la ubicación como una forma más general de la diferenciación *horizontal* de productos. Así, un consumidor estará entre dos marcas, dos atributos o dos variedades, y sus "costos de transporte" medirán cuánto le disgusta comprar una marca, un atributo o una variedad menos preferida.

Posteriormente, ponemos a prueba nuestros resultados teóricos a través de una evaluación empírica, donde se construyen dos índices que tratan de capturar la calidad y la diferenciación *horizontal* de los productos. Los índices propuestos se diferencian de la literatura empírica del comercio intrasectorial (véase Brodzicki *et al*., 2020; Mukerji y Panagariya, 2019; Ito y Okubo, 2012; Azhar y Elliott, 2006; Schott, 2004; Aturupane *et al*., 1999; Greenaway *et al*., 1995), pues esta literatura utiliza el índice de Grubel y Lloyd para evaluar la intensidad del comercio intrasectorial y utilizan un cociente ajustado de valores unitarios, para aproximar el tipo de comercio intrasectorial[2]. Nuestros índices en cambio miden la brecha de precios y cantidades de forma ponderada, puesto que nuestros resultados teóricos vinculan estrechamente los precios y las cantidades producidas con el tipo de diferenciación de producto, esto nos permite identificar no solo el tipo de comercio intrasectorial en un producto, sino también si un país importa o exporta productos diferenciados *horizontal* y *verticalmente*. Además, nuestros resultados también permiten identificar las situaciones donde existe una interdependencia entre el comercio intrasectorial *horizontal* y el *vertical*. Por ejemplo, no solo podemos identificar mercados con un tipo específico de comercio intrasectorial (*horizontal* o *vertical*) como la literatura empírica descrita, sino que identificamos también cuándo un país es exportador (importador) de calidad, cuando un país es exportador

[2] Otra literatura empírica (véase Song, Wu, Deng y Deng, 2021; Khandelwal, Schott y Wei, 2013; Konstantins y Ramune, 2010) trata de examinar la calidad a partir de datos en el nivel de empresas. Esta literatura estima una función de demanda que proviene de una función de utilidad, como la de Dixit y Stiglitz (1977) de la competencia monopolística, e interpretan la calidad como un cambio en la pendiente de la curva de demanda. Pese a la ventaja que representa tener datos en el nivel empresa para estimar la calidad, una limitación importante radica en que muy pocos países gozan de datos en el nivel empresa. Adicionalmente, usar la función de utilidad de la preferencia por la variedad puede limitar los resultados, pues la pendiente de la demanda (la elasticidad de sustitución) puede capturar mayormente el cambio en la variedad, que la preferencia por la calidad de los consumidores.

(importador) de productos diferenciados *horizontalmente*, o cuando se exporta e importa simultáneamente productos diferenciados *vertical* y *horizontalmente*.

Nuestros resultados pueden verse reforzados por la evidencia encontrada por Di Comite, Thisse y Vandenbussche (2014); Vandenbussche (2014). Estos autores usan datos en el nivel empresa y estiman los *mark-ups* de los productos para aproximar la calidad, Vandenbussche (2014), textualmente mencionan: "Mostramos que la calidad puede ir en una dirección diferente a la cuota de mercado, es decir, los productos con las cuotas de mercado más grandes no necesitan tener la más alta calidad" (p.1). Nuestros resultados teóricos aceptan esa posibilidad, encontrada por los autores. Por lo tanto, la aportación fundamental de este artículo radica en dos elementos: un nuevo marco teórico que concilia los dos tipos de diferenciación de productos (*vertical* y *horizontal*) considerando simultáneamente la preferencia por la variedad y la preferencia por la calidad; y un nuevo método de medición del comercio intrasectorial, el cual, a partir de ese marco teórico, permite obtener resultados más precisos que los de la literatura empírica descrita.

La organización del artículo es la siguiente: la sección 2 elabora un modelo teórico de competencia oligopólica *a la* Hotelling, considerando simultáneamente la diferenciación *horizontal* y *vertical* de productos. La sección 3 comprende la parte empírica del análisis, se presentan dos índices que se desprenden del análisis teórico, y se presentan los resultados principales. La última sección concluye.

1. Un modelo simple de calidad *a la* Hotelling

Quizá el modelo que más pueda aproximarse a un modelo tipo Hotelling en el comercio internacional sea el de Lancaster (1980), pues puede aproximar casos de oligopolio en un modelo de competencia monopolística. Aquí se van a retomar algunos elementos de su análisis, pero principalmente se usarán los desarrollos de Belleflamme y Peitz (2010) y las interpretaciones de Balart, (2021), Aydinonat y Köksal (2019), Zhang, Yixue, Zhang y Shuai (2018) y Kim (2012). Se plantea desarrollar un modelo teórico que de manera simultánea capture la diferenciación *horizontal* y *vertical* de productos, así se podrán extraer conclusiones para cada tipo de diferenciación.

1.1 Diferenciación horizontal

Como supuestos generales del modelo, asumimos un marco de localización estándar *a la* Hotelling con dos firmas, una doméstica que produce un bien exportable y la otra foránea que produce un bien que es importado. Los consumidores están uniformemente distribuidos con una densidad unitaria en el intervalo [0,1], donde el número de consumidores es igual a *N*. Para

simplificar el análisis, asumimos que $N = 1$, lo que implicaría que la utilidad de un consumidor equivale al agregado o bien a un consumidor representativo. Además, para mantener el análisis simple se asumen costos de transporte lineales y se asume que $e = 1$, donde e es el tipo de cambio de la moneda foránea en términos de la moneda nacional, este supuesto equivale a pensar que el intercambio de bienes se realiza en una misma moneda común, tanto para la importación del producto foráneo como para la exportación del producto doméstico.

La localización será interpretada no de forma geográfica sino como una forma más general de diferenciación *horizontal* de productos, como lo hacen Balart (2021), Zhang *et al*., (2018) y Kim (2012)[3]. Como ejemplo, piénsese que un consumidor está entre la marca A o la marca B, donde una de las dos representa su marca favorita, o la más cercana disponible. En medio del intervalo unitario, el consumidor será indiferente entre qué marca elegir, pues tanto la marca A como la marca B representan su variedad preferida. Por lo tanto, la localización representará en nuestro modelo la diferenciación *horizontal* entre el producto domestico que se exporta y el producto que es importado; es decir, este elemento va a capturar la preferencia por la variedad de los consumidores, y los "costos de transporte", en este caso, medirán cuánto le disgusta al consumidor comprar una variedad menos preferida.

1.2 Firmas, diferenciación vertical y equilibrio

Asumimos que las firmas operan bajo economías de escala con la siguiente función de costos totales:

$$CT_i = k_i + Q_i c_i \tag{1}$$

donde $i = d, f$ que asocia d con la firma doméstica y f con la firma foránea. k es el costo fijo, Q es la cantidad producida y c_i es el costo marginal que pueden ser asimétricos entre firmas. La utilidad indirecta del consumidor (v), y en caso de que elija el bien doméstico, vendrá definida, como:

$$v = r_d - \mu_d x - p_d \tag{2}$$

donde μ_d indica el grado de sustitución entre el producto doméstico y el producto foráneo, es decir, indica la elasticidad de diferenciación *horizontal*

[3] De hecho, el mismo Hotelling planteó que esta debía ser la interpretación de su modelo, véase Pepall *et al*. (2014, p. 144), y Aydinonat y Köksal (2019), para una discusión sobre la interpretación de la ubicación en el modelo de Hotelling.

entre bienes y es un indicador de la preferencia por la variedad[4]. x representa la "ubicación" del consumidor, en este caso representa la cercanía que tiene el consumidor hacia su variedad preferida, p_d es el precio del bien doméstico y r_d es el precio de reserva del producto nacional y captura la calidad del mismo, es decir, este parámetro en nuestro modelo va a determinar la preferencia por la calidad de los consumidores. La literatura que examina la calidad a partir del modelo de Hotelling, utiliza este mismo parámetro para capturar la calidad de producto (véase por ejemplo Kim, 2012; Montefiori, 2005; Ma y Burgess, 1993).

La utilidad indirecta del consumidor en el caso de que elija el bien foráneo será:

$$v = r_f - \mu_f|1 - x| - p_f \tag{3}$$

donde p_f indica el precio del bien foráneo y r_f indica la disposición a pagar por el bien foráneo y en nuestro modelo, representará la calidad del mismo. Nótese que si $r_d \neq r_f$ implicaría que el bien doméstico y el foráneo tienen diferente calidad, donde el r más elevado es el bien que tiene la mayor calidad. Nótese también que la facilidad de sustitución entre bienes (μ_f) se asume diferenciada, lo que implica simplemente que puede ser más sencillo sustituir un bien que otro.

Si $v \leq 0$ en (2) y/o en (3) implicaría que no hay comercio intrasectorial pues los consumidores optarían por no consumir alguno de los dos bienes. Dado que se asume que $v > 0$ en ambas ecuaciones, tiene que cumplirse que $r_d > \mu_d x + p_d$ en (2) y $r_f > \mu_f|1 - x| + p_f$ en (3), lo que significa que hay un nivel de calidad que espera obtener el consumidor al adquirir cualquier producto, de lo contrario no habría comercio intrasectorial del bien, incluso en un contexto de preferencia por la variedad. Si se iguala (2) y (3) y se despeja para x se podrá encontrar al consumidor indiferente:

$$Q_d = \tilde{x} = \frac{\mu_f + (r_d - r_f) + (p_f - p_d)}{\mu_f + \mu_d} \tag{4}$$

donde $\tilde{x}$ representa al consumidor que es indiferente entre consumir el bien doméstico y el bien importado, y corresponde con la cantidad demandada del

[4] El grado de sustitución del producto domestico (μ_d) será una función que dependa del grado de sustitución del producto foráneo (μ_f) y viceversa, de manera que se tendría $\mu_d(\mu_f)$ y $\mu_f(\mu_f)$. Pero ya que estos elementos se toman como parámetros en el modelo, para simplificar hemos omitido esta relación, sin embargo, la interrelación de μ_d y μ_f representa una de las principales explicaciones para que se cumpla el caso 1 (véase sección 3).

bien doméstico (Q_d). Se observa que el consumidor tomará su decisión de elección con base en los precios, en la diferenciación *horizontal* y en la calidad del producto. La cantidad para el bien foráneo estaría dada por $Q_f = 1 - \tilde{x}$. Si se especifica la función de beneficio para la firma doméstica, se tendrá:

$$\pi_d = p_d Q_d - CT_d \tag{5}$$

donde π_d indica los beneficios. La función de beneficios para el caso de la firma foránea es análoga. Colocando (1) y (4) en (5), maximizando beneficios y resolviendo el equilibrio de Nash en estrategias puras, se obtendrán los siguientes precios de equilibrio:

$$p_d^* = \frac{1}{3}\left[\left(r_d - r_f\right) + \left(c_f + \mu_d\right) + 2\left(c_d + \mu_f\right)\right] \tag{6}$$

$$p_f^* = \frac{1}{3}\left[\left(r_f - r_d\right) + \left(c_d + \mu_f\right) + 2\left(c_f + \mu_d\right)\right] \tag{7}$$

Se observa que los precios dependerán de los costos marginales, de la calidad y del grado de diferenciación *horizontal* de los productos. Algunas conclusiones generales de las ecuaciones (6) y (7) son las siguientes:

- La calidad y la diferenciación *horizontal* de los productos le estarían dando poder de mercado a las firmas en un contexto de competencia oligopólica, por lo que ambos elementos componen el *mark-up*.
- La calidad del producto de la competencia reduce el *mark-up*. Esto implica que la calidad de un producto aumenta su *mark-up*, pero disminuye el *mark-up* del producto de la competencia.
- La diferenciación *horizontal* de la competencia tiene un efecto mayor sobre los precios que la diferenciación *vertical*[5]. Esto implica que incluso si una firma produce un bien de mejor calidad que otro, si la firma competidora es más eficiente diferenciándose *horizontalmente*, logrará compensar la menor calidad de su producto. En otras palabras, la variedad o marca de un producto podría hacer que una firma fuera más rentable, incluso si su competencia ofrece un producto de mayor calidad.
- La eficiencia de las firmas también afecta a los precios en una proporción de 2 a 1. Esto implica que la eficiencia en costos puede determinar el tipo de competencia a seguir por cada firma pues si la diferenciación *horizontal* es más barata que la diferenciación *vertical*,

[5] Esto se observa claramente en las ecuaciones (6) y (7), pues la diferenciación *horizontal* afecta en 2/3 a los precios, al contrario del efecto en la calidad que afecta solo en 1/3.

la firma preferirá competir por la vía de variedad que de la calidad. En palabras sencillas, las firmas menos rentables o eficientes podrán quedarse en el mercado compitiendo con productos diferenciados *horizontal* o *verticalmente* según sus costos.

Si se obtiene las cantidades de equilibro se tendrán las siguientes ecuaciones:

$$Q_d^* = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{(r_d - r_f) + (c_f - c_d) - \mu_d}{\mu_d + \mu_f}\right] \tag{8}$$

$$Q_f^* = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{(r_f - r_d) + (c_d - c_f) + \mu_d}{\mu_d + \mu_f}\right] \tag{9}$$

Nótese que la firma que tenga el bien de mayor calidad tendrá mayor demanda que la competencia, incluso si tiene el precio más elevado. Nótese además que la firma más eficiente en costos producirá más. También se observa un *trade-off* entre la diferenciación *horizontal* y la cantidad producida, es decir, entre mayor diferenciación *horizontal*, mayor precio, pero menor cantidad producida.

Las ecuaciones (6)-(9) arrojan un único equilibrio de Nash. La unicidad del equilibrio se asegura debido a dos elementos. El primero es el supuesto de costos de transporte lineales, pues esto asegura que los resultados del equilibrio igualmente sean lineales como se observa en las ecuaciones (6)-(9). El segundo es el supuesto de una distribución poblacional uniforme entre los consumidores pues esto permite que la utilidad indirecta sea igualmente lineal.[6]

2 Contenido empírico del modelo

Los resultados de las ecuaciones (6)-(9) pueden usarse para examinar empíricamente la calidad de los productos en el mercado internacional. Puede notarse que las variables relevantes para el análisis serán por tanto los precios y las cantidades, esto se debe a que los resultados de equilibrio muestran que las diferentes combinaciones posibles entre estas variables pueden identificar la diferenciación *horizontal* o la calidad de los productos en un entorno de oligopolio. Por ejemplo, cuando existen precios diferenciados implica que hay

[6] Sin embargo, si se asumen costos de transporte no lineales o una densidad de población específicamente no lineal puede que existan otros equilibrios de Nash en la resolución del modelo. Adicionalmente, dado que en el modelo se considera que no existen elementos de incertidumbre, esto permite que no existan otros equilibrios en estrategias mixtas. La consideración de incertidumbre en las empresas oligopólicas que participan en el comercio internacional, las distribuciones de población no lineales o los costos de transporte del tipo no lineal están fuera del alcance de este artículo, pero se considerará para futuras investigaciones.

competencia vía calidad de productos y en este caso se espera que la firma con mayor cantidad producida sea la que tenga el producto con la mayor calidad. No obstante, su competidora se espera que compense su baja calidad diferenciándose horizontalmente como respuesta. Al contario, el producto con la mayor calidad, pero con menor cantidad producida, será el producto que tenga un fuerte *mark-up* proveniente tanto de la calidad como de la diferenciación *horizontal*.

En consecuencia, en vez de seguir una construcción estándar como el índice de Grubel y Lloyd, se tratará de proponer una medición alternativa que trate de separar precisamente el precio y la cantidad de los productos para distinguir todos los casos posibles de interacción entre competidores. Cabe aclarar que la literatura empírica del comercio intrasectorial puede interpretar como un error de información o agregación la existencia de precios idénticos en un mismo producto (Brodzicki *et al*. 2020; Mukerji y Panagariya, 2019; Greenaway *et al*., 1995)[7]. Al margen de la existencia de posibles anomalías en la obtención de información o en la agregación de los productos, el modelo teórico aquí planteado sí acepta esa posibilidad, pues se muestra que los precios idénticos esconden una rentabilidad asimétrica que implica una mejor capacidad de las firmas para diferenciarse *horizontalmente*. Bajo esta situación, nuestros resultados predicen que quien tenga una mayor cantidad producida será la firma con menor *mark-up*, pues de esa forma logra permanecer en el mercado, precisamente, por esta razón hay que considerar por separado los precios y las cantidades de los productos.

2.1 Dos índices para identificar la calidad de productos

Se proponen dos índices, uno para precios y otro para cantidades. Las ecuaciones para ambos quedan definidas a continuación:

$$Ip = \frac{p_x - p_m}{p_x + p_m} \tag{10}$$

[7] El problema de la agregación radica en que, si se ocupa un elevado nivel de agregación en los productos, la igualdad de precios se explicaría porque ya no se estarían reflejando productos sino ramas industriales. Por otro lado, los problemas en la obtención de datos radican en que las agencias aduanales podrían registrar productos en categorías distintas. Pero quizá donde se vea más claro este argumento es en la modelación del índice de valores unitarios que utiliza la literatura descrita, para examinar el comercio intrasectorial *horizontal* de productos. Este se define como $p_x/p_m = 1 \pm \alpha$, donde α es una medida de dispersión del error que en promedio es usada con el 25%. Si se asumiera que α=0 no habría dispersión del error y $p_x/p_m = 1$, lo cual sería un resultado poco confiable desde esa óptica. En cuanto a la información imperfecta, como argumenta Schott (2004), incluso con información imperfecta, las variaciones en los precios pueden reflejar la calidad de los productos.

$$Iq = \frac{Q_x - Q_m}{Q_x + Q_m} \tag{11}$$

donde *x* indica el producto exportado y *m* el producto importado. Se cumple, además, que $-1 \leq Ip, Iq \leq 1$. En términos intuitivos, se dirá que cuando el indicador de precios (Ip) sea negativo, una economía está importando un producto más caro de lo que lo exporta. Lo contario ocurre cuando el indicador sea positivo. En el caso del indicador para las cantidades (Iq), cuando sea negativo, indica que se está importando mayores cantidades de las que se exportan, caso contario cuando el indicador sea positivo. De acuerdo con los resultados del modelo teórico, el indicador de precios y cantidades mostraría principalmente si se está exportando o importando calidad o productos diferenciados *horizontalmente*; y el tipo de competencia en cuanto al *mark-up*. La tabla 1 resume los principales resultados que se podrían encontrar con ambos índices si se examinan de forma conjunta.

Tabla 1
Resultados del modelo teórico y su relación con los índices propuestos

Casos	Precios	Cantidades	Índices	Resultado teórico	Conclusión
1	$p_x = p_m$	$Q_x > Q_m$	$Ip = 0$	*Mark-up* de la exportación se ajusta al de la importación	Se importan productos diferenciados *horizontalmente*
			$Iq > 0$		
		$Q_x < Q_m$	$Ip = 0$	*Mark-up* de la importación se ajusta al de la exportación	Se exportan productos diferenciados *horizontalmente*
			$Iq < 0$		
2	$p_x > p_m$	$Q_x > Q_m$	$Ip > 0$	*Mark-up* de la exportación fuertemente influenciado por la calidad, *mark-up* de la importación fuertemente influenciado por la variedad	Se exporta calidad (productos diferenciados *verticalmente*)
			$Iq > 0$		
3		$Q_x < Q_m$	$Ip > 0$	*Mark-up* de la exportación fuertemente influenciado por la diferenciación *horizontal* y la calidad	Se exportan productos diferenciados *vertical* y *horizontalmente*
			$Iq < 0$		
4	$p_x < p_m$	$Q_x > Q_m$	$Ip < 0$	*Mark-up* de la importación fuertemente influenciado por la diferenciación	Se importan productos diferenciados *vertical* y *horizontalmente*
			$Iq > 0$		

				horizontal y la calidad	
5		$Q_x < Q_m$	$Ip < 0$ $Iq < 0$	*Mark-up* de la importación fuertemente influenciado por la calidad, *mark-up* de la exportación fuertemente influenciado por la variedad	Se importa calidad (productos diferenciados *verticalmente*)

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 1 muestra los casos más relevantes que son resultado del modelo teórico. En primer lugar, recuérdese que por diferenciación *vertical* de productos nos referimos a la calidad del mismo, en nuestro ejemplo recurrente, piénsese en un café *gourmet* vs un café que no lo sea, el primero será de mayor calidad que el segundo. Por otro lado, la diferenciación *horizontal* de productos se refiere a una situación donde los productos se distinguen por atributos, marcas o variedades, y los consumidores no están de acuerdo en cual marca o variedad representa su favorita incluso si los productos poseen la misma calidad. Siguiendo el mismo ejemplo, en este caso se tendrá el café de la variedad o marca A, vs. café de la variedad o marca B. En la tabla 1, por lo tanto, es posible distinguir cuando una economía está importando café *gourmet* (que diremos que está importando calidad o productos diferenciados *verticalmente*), o cuando está exportando marcas o variedades (que diremos está exportando productos diferenciados *horizontalmente*).

Los resultados de la tabla se descomponen en un total de cinco casos, mismos que se relacionan con los índices propuestos para extraer conclusiones específicas. Por ejemplo, se observa que cuando el indicador de precios es igual a cero, pero el indicador de cantidades es positivo, se concluye que se están importando productos diferenciados horizontalmente puesto que el *mark-up* domestico (el de la exportación) es menor que el de la importación. Lo contrario ocurre cuando el indicador de cantidades es negativo, y el indicador de precios es igual a cero. Para comprender con mayor exactitud la relación del modelo teórico con los índices propuestos valdría la pena examinar cada caso en cuestión:

- *Caso 1*: $p_f^* = p_d^*$

Si igualamos la ecuación (6) y (7) asumiendo que $r_d = r_f$, se podrá obtener la siguiente ecuación que describiría una situación de equilibrio donde los precios de las firmas son iguales:

$$\mu_d + c_f = p_f^* = p_d^* = c_d + \mu_f \tag{12}$$

Considerando que $p_d^* = p_x$ y $p_f^* = p_m$, la ecuación anterior implica que los precios únicamente dependerán de los costos marginales y del grado de diferenciación *horizontal*. Nótese que si se asume en (12) que $c_f \neq c_d$, para que se siga cumpliendo que $p_f = p_d$, necesariamente tiene que cumplirse que $\mu_f \neq \mu_d$, esto significa que el *mark-up* se ajusta ante las diferencias de eficiencia entre las firmas oligopólicas o viceversa, esto es, los costos se ajustan ante diferencias en el *mark-up*. Así, la firma que tenga menor grado de diferenciación *horizontal*, es decir, la que tenga menor poder de mercado, tendrá que reducir sus costos para permanecer en el mercado y ser competitiva ante una preferencia de los consumidores que beneficia a la competencia. Esto se ve claramente si se asume que $\mu_f > \mu_d$, pues en este caso necesariamente debe cumplirse que $c_d < c_f$. En efecto, la firma con el menor *mark-up* estaría sacrificando parte de su rentabilidad para permanecer en el mercado.

Este resultado recuerda a una interpretación de Ros (2015, p. 9) sobre la competencia de bienes comerciables: "Su baja capacidad para transmitir a precios los cambios de costos y la especificidad de los cambios en estos, hacen que el sector de comerciables sea un sector de márgenes de beneficio flexibles y precios exógenos." Sin embargo, en el modelo se muestra que no es por una competencia muy intensa entre las firmas, sino precisamente el *mark-up* se torna flexible por una competencia oligopólica.

Obteniendo las cantidades de equilibrio para este caso, tendremos:

$$Q_d^* = \frac{\mu_f}{\mu_d + \mu_f} \tag{13}$$

$$Q_f^* = \frac{\mu_d}{\mu_d + \mu_f} \tag{14}$$

considerando que $Q_d^* = Q_x$ y $Q_f^* = Q_m$, las ecuaciones muestran que la firma con mayor poder de mercado producirá menos que la firma con menor *mark-up*. Esto se aprecia claramente si se asume que $\mu_f > \mu_d$, pues en este caso se tendrá que $Q_f^* < Q_d^*$. En efecto, en este caso la firma foránea será más ineficiente desde la perspectiva del bienestar pues producirá menor cantidad que la firma que tenga un menor *mark-up*. En esta circunstancia, es fácil notar que se tendría que $\pi_f^* > \pi_d^*$ si se sustituyen los precios y cantidades de equilibrio en las funciones de beneficios. Por lo tanto, en este caso 1, el índice de precios tiene que ser igual a cero, pero el signo del índice de cantidades dará el sentido del comercio de productos diferenciados horizontalmente y de la intensidad del *mark-up* en el comercio. Si el signo es positivo, implicaría que

se está importando diferenciación *horizontal* y, en este caso, el *mark-up* es relativamente bajo. Lo contario ocurre cuando el índice de cantidades es negativo.

- *Caso 2*: $p_d^* > p_f^*$ y $Q_d^* > Q_f^*$

Si se tiene una situación donde el precio del bien doméstico es mayor al precio del bien foráneo, y la demanda por el bien doméstico es mayor a la demanda por el bien foráneo, necesariamente se tienen que cumplir las siguientes desigualdades, que vienen de asumir $p_d^* > p_f^*$ en (6) y (7) y $Q_d^* > Q_f^*$ en (8) y (9):

$$2(r_d - r_f) + (c_d - c_f) + (\mu_f - \mu_d) > 0 \tag{15}$$

$$(\mu_f - \mu_d) + 2(r_d - r_f) + 2(c_f - c_d) > 0 \tag{16}$$

Se observa en la ecuación (15), que para que se cumpla la desigualdad se tiene que cumplir principalmente que $r_d > r_f$, pues estos parámetros afectan el doble a la desigualdad que los parámetros de costos o los de la diferenciación *horizontal*. En efecto, en este caso, el producto doméstico tiene una calidad mayor al producto foráneo. Obsérvese también que si se reajusta la ecuación se tendría $2(r_d - r_f) + (c_d + \mu_f) > (c_f + \mu_d)$, esto implica que el *mark-up* del producto doméstico está influenciado más por la calidad del producto que por la diferenciación *horizontal* del mismo.

En una situación donde $r_d > r_f$ y $c_d < c_f$, se tiene que cumplir que $\mu_f > \mu_d$ o bien que la brecha en los costos y en los parámetros de diferenciación *horizontal*, sea muy pequeña. Esto implica que cuando el producto doméstico compite vía calidad, el producto foráneo tendría que competir vía variedad o marca para mantenerse en el mercado, aun si es más eficiente la firma doméstica. En este caso, el *mark-up* del bien foráneo viene dado principalmente por la diferenciación *horizontal* del producto.

Por último, en la ecuación (16), se observan los mismos resultados pues los parámetros de la calidad afectan el doble que los parámetros de la diferenciación *horizontal* de producto. Nótese también que los costos afectan en este caso al mismo nivel que la calidad, es decir, dos a uno. Entonces, la demanda del producto doméstico es mayor porque ofrece un producto de mayor calidad, o bien, porque el producto foráneo compite fuertemente vía variedad o diferenciación *horizontal*. En una situación donde $c_f < c_d$, el efecto en la calidad tendría que superar al efecto en los costos, es decir, la calidad del

producto doméstico debe superar los bajos costos del producto foráneo y, además, la diferenciación *horizontal* del producto foráneo tendría que superar fuertemente al del producto doméstico. Este caso se podrá identificar claramente cuando el índice de precios sea positivo y el índice de cantidades arroje un valor igualmente positivo.

- *Caso 3*: $p_d^* > p_f^*$ y $Q_d^* < Q_f^*$

En este caso, se tienen que mantener los mismos resultados de la ecuación (15) en el caso de la calidad, es decir, se debe cumplir principalmente que $r_d > r_f$, pero esta vez se tendría que cumplir adicionalmente $(\mu_f - \mu_d) + 2(r_d - r_f) + 2(c_f - c_d) < 0$. Esto implica que si el producto domestico tiene mayor calidad que el producto foráneo, pero se demanda más el producto foráneo que el doméstico, es porque el *mark-up* proveniente de la diferenciación *horizontal* del bien doméstico es mayor al del bien foráneo y los costos del bien domestico son mayores a los del bien foráneo. Por lo tanto, se tendrá que el *mark-up* del producto doméstico está fuertemente influenciado también por la diferenciación *horizontal*, pues se tiene que cumplir con $\mu_f < \mu_d$ y $c_f < c_d$, de manera que ambos efectos compensen el efecto de $r_d > r_f$. En palabras sencillas, se está ofreciendo un producto doméstico de alta calidad y de una variedad que es fuertemente preferida por los consumidores. Como se muestra en la tabla 1, este caso se podrá identificar cuando el índice de precios arroje un valor positivo, y el índice de cantidades arroje un valor negativo.

- *Caso 4*: $p_d^* < p_f^*$ y $Q_d^* > Q_f^*$

Los casos donde $p_d^* < p_f^*$ pueden verse como los casos análogos de los casos 2 y 3, puesto que son lo mismo que $p_f^* > p_d^*$. Entonces, el análisis y los efectos son los mismos que los casos descritos, solo que para el caso específico del producto foráneo, en lugar del producto doméstico. Así, el caso 4 donde $p_d^* < p_f^*$ y $Q_d^* < Q_f^*$ será equivalente al caso 2, puesto que sería igual a $p_f^* > p_d^*$ y $Q_f^* > Q_d^*$, en este caso se tendría que cumplir: $2(r_d - r_f) + (c_d - c_f) + (\mu_f - \mu_d) < 0$ y $(\mu_f - \mu_d) + 2(r_d - r_f) + 2(c_f - c_d) < 0$. Por lo tanto, en esta situación, la calidad del producto foráneo es mayor que la calidad del producto doméstico y su mark-up vendrá influido fuertemente por la calidad, mientras que el *mark-up* del producto foráneo vendrá influido por la variedad o diferenciación *horizontal* del producto. Para identificar empíricamente este caso, el índice de precios debe ser negativo, pero el índice de cantidades debe arrojar un valor positivo.

- *Caso 5*: $p_d^* < p_f^*$ y $Q_d^* > Q_f^*$

Para el caso donde se cumple en el modelo $p_d^* < p_f^*$ y $Q_d^* > Q_f^*$, que es análogo al caso 3, se tendría que $p_f^* > p_d^*$ y $Q_f^* < Q_d^*$, en este caso, la conclusión es la misma pero ahora para el caso del bien foráneo. En efecto, en esta situación se está ofreciendo un producto foráneo de alta calidad y de una variedad que es fuertemente preferida por los consumidores. Para identificar este último caso, debe cumplirse simultáneamente que el índice de precios arroje un valor negativo, y el índice de cantidades arroje un valor negativo también.

2.2 Probando los índices: datos, fuentes y método

Para poner a prueba los índices propuestos se usará la base de datos *International Trade Database at the Product Level* (BACI), elaborada por el *Centre for Prospective Studies and International Information* (CEPII, 2021), esta base ofrece datos detallados de comercio para más de 5000 productos y 200 países. La base tiene la ventaja de integrar los costos de transporte de bienes, eliminar la doble contabilidad inherente del comercio y presenta los datos en términos de una moneda única, el dólar estadounidense. Se usan los datos en su versión más desagregada posible, esto es, un nivel de seis dígitos (en particular se usa el sistema armonizado versión HS17). Para aproximar los precios, se usó el cociente del valor de las exportaciones/importaciones y la cantidad exportada/importada. Temporalmente se usa el dato más reciente posible, el año 2018. Dado que se tiene un *stock* de datos de casi 8 millones únicamente para el año 2018, la tabla 2 presenta solo algunos productos y países seleccionados aplicando los índices de las ecuaciones (10) y (11). La elección de los productos y de los países es arbitraria en su mayoría, aunque se apoya en *The Observatory of Economic Complexity* (OEC, 2021) para guardar una correlación entre países y productos.

3. Resultados

De la tabla 2 podemos extraer información relevante para identificar la calidad y la diferenciación *horizontal* de los productos. Por ejemplo, Brasil es el mayor exportador de café en el mundo (OEC, 2021), y esto se ve reflejado en el indicador de cantidad, pues el café no tostado alcanza un valor de uno. Sin embargo, el café que exporta es más barato que el café que importa, y esto se refleja en el indicador de precio, pues este tiene un valor elevado (-0.9 para el caso del café no tostado). Con estos resultados y usando la tabla 1, se puede concluir que Brasil importa tanto calidad como variedad en el caso del café no tostado. En el caso del café tostado, se puede concluir que Brasil importa calidad, es decir que está importando café tostado estilo *gourmet*, pero está exportando café tostado de baja calidad.

Tabla 2
Indicadores de precio (Ip) y cantidad (Iq) para productos y países seleccionados (año 2018)

Código	Producto	Brasil		Colombia		Costa Rica		México		España		Francia	
		Ip	Iq	Ip	Iq	Ip	Iq	Ip	Iq	Ip	Iq	Ip	Iq
90111	Café: no tostado ni descafeinado	-0.89	1.00	0.32	0.84	0.43	0.89	0.22	0.58	0.22	-0.91	0.06	-0.95
90121	Café: tostado, no descafeinado	-0.55	-0.11	-0.35	0.96	0.62	-0.70	-0.30	0.37	-0.09	-0.36	-0.01	-0.13
220410	Vino espumoso	-0.04	-0.90	-0.22	-0.97	-1.00	0.00	0.18	-0.89	-0.44	0.83	0.42	0.84
220421	Vino no espumoso	-0.24	-0.93	0.40	-1.00	0.16	-0.99	0.21	-0.98	-0.05	0.92	0.05	0.83
330300	Perfumes y aguas de tocador	0.03	-0.84	-0.35	0.72	-0.07	-0.96	-0.48	0.21	0.04	0.36	0.02	0.86
330741	Perfumes y desodorantes	0.42	-0.92	0.62	-1.00	-1.00	0.00	0.39	-0.98	0.21	-0.47	0.48	0.15
610442	Vestidos de algodón, de punto o de ganchillo	0.42	-0.79	0.21	-0.81	0.52	-1.00	0.04	-0.65	0.23	-0.40	0.15	-0.49
620442	Vestidos de algodón (excepto de punto)	0.61	-0.97	0.04	-0.44	0.69	-0.99	-0.10	-0.41	0.28	-0.41	0.25	-0.47
847149	Computadoras portátiles	-0.20	-0.91	0.08	-0.99	0.17	-0.97	0.01	0.56	-0.13	-0.74	0.12	-0.49
851761	Teléfonos para redes celulares u otras redes inalámbricas	-0.43	0.54	0.07	-0.98	0.41	-0.99	0.21	-0.52	0.05	-0.74	0.14	0.01
870324	Carros no eléctricos	0.07	-0.87	-0.25	-0.91	0.73	-0.96	0.34	-0.44	0.07	-0.63	0.13	-0.52
870380	Carros eléctricos	-0.08	-0.99	-0.02	-0.99	-1.00	0.00	-0.09	0.88	0.05	-0.04	-0.03	0.25
901819	Instrumentos y aparatos médicos, quirúrgicos: aparatos de formación de imágenes por resonancia magnética	0.44	-0.97	-0.05	-0.92	-0.12	0.82	0.38	0.76	0.24	-0.70	-0.31	-0.14
901831	Instrumentos y aparatos médicos, quirúrgicos: aparatos de electro diagnóstico	0.25	-0.89	-0.14	-0.65	0.94	-0.64	0.67	0.11	-0.33	0.46	0.10	-0.03
940330	Mobiliario: metal, para uso de oficina	-0.39	0.73	-0.29	0.07	0.11	-0.84	0.27	0.20	0.11	0.15	0.03	-0.68
940350	Mobiliario: de madera, para uso de oficina.	-0.15	0.98	0.31	-0.08	0.01	-0.90	-0.02	0.74	0.24	-0.45	0.07	-0.57

El caso de Brasil contrasta con el de Costa Rica en el caso del café, pues se puede concluir que Costa Rica exporta café tostado estilo *gourmet*, aunque con una fuerte influencia también de la diferenciación *horizontal*, es decir, los consumidores de café tostado costarricense toman en cuenta, además de la calidad, la marca del café o demás atributos. Esto se observa en los indicadores de precio (0.62) y de cantidad (-0.70). En el caso del café no tostado, se puede concluir que Costa Rica exporta café tipo *gourmet*, y en este caso la diferenciación *horizontal* no influye como lo hace en el caso del café tostado. Esto es así dado los signos de los indicadores de precio (0.43) y cantidad (0.89).

Los casos de Colombia y México en el café son similares en los signos de los indicadores de precio y cantidad, aunque obviamente los de cantidad en Colombia son más elevados pues la cantidad exportada es mayor que en México. Se puede concluir que ambos países exportan calidad en el caso del café no tostado, o dicho, en otros términos, exportan café estilo *gourmet*. Sin embargo, ambos países importan café tostado *gourmet* o de una marca preferida, es decir, importan calidad y café diferenciado *horizontalmente*. Algo similar pasa con el caso del café francés, pues se observa que sus indicadores de precios tienden a cero, y los indicadores de cantidad son negativos, esto implica concluir que Francia tiende a exportar más café *horizontalmente* diferenciado, que café de mejor calidad.

En el caso del vino, México y Francia presentan diferencias y similitudes en sus indicadores. Para Francia, se puede concluir que exporta calidad. Esto se observa porque sus indicadores de precios son positivos y los de cantidad son negativos. En cambio, México exporta tanto calidad como diferenciación *horizontal*. En el caso específico del vino espumoso se observa que Francia tiene indicadores para precio y cantidad más elevados que México, por lo que se puede inferir que la calidad es mayor en el caso del primer país que para el segundo. Es decir, los consumidores identifican los vinos de Francia de mejor calidad que los de México, pero reconocen que ambos son de buena calidad.

En el caso de los perfumes y desodorantes, se observa que Francia tiene un caso similar, es decir, exporta calidad. No obstante, en el caso de los perfumes y aguas de tocador, se observa que el indicador de precios esta cercano a cero, lo que implica concluir que Francia exporta productos diferenciados *horizontalmente* en este rubro. Para el caso de México, se observa que sus indicadores reflejan que es importador de calidad y de marcas preferidas en perfumes y aguas de tocador.

Francia y España son exportadores de calidad y de marca o atributos, en el caso de los vestidos de algodón; y presentan indicadores similares, tanto en signo

como en magnitud. En el caso de los muebles, España se distingue de Francia, pues se puede concluir que el primero exporta calidad, pero el segundo exporta diferenciación *horizontal*. En términos intuitivos, se podría aproximar como verdadero el siguiente enunciado: los muebles de España tienen mejor calidad, pero los muebles de Francia son demandados por la marca, la variedad o algún atributo, como la estética de los muebles.

En la tabla 2, también se incluyen algunos bienes tecnológicos donde la calidad juega un papel central, pero no se descarta la diferenciación *horizontal*. Por ejemplo, en el caso de los carros no eléctricos, se observa que México tiene un indicador de precios de 0.34 y un indicador de cantidad de -0.44, esto indica que México exporta calidad y marca (diferenciación *horizontal*) en lo referente a vehículos no eléctricos. No obstante, se observa que México importa calidad y marca en el caso de los vehículos eléctricos, pues tiene un indicador de precios de -0.09 y un indicador de cantidad de 0.88. Nótese además que el indicador de precios está muy cercano a cero, esto indicaría que la competencia en este mercado está más fuertemente influida por la diferenciación *horizontal*, o sea la variedad o marca, que por la calidad del producto. Nótese también el caso de España, pues sus indicadores de precios en el caso de los vehículos están muy cercanos a cero, pero los de cantidades son negativos, esto significa que este país exporta vehículos diferenciados *horizontalmente*.

Por último, se observa que para computadoras portátiles México tiende a importar diferenciación *horizontal*. En el caso de los teléfonos, se observa que México exporta calidad y variedad, aunque sus indicadores son bajos, es decir, marginalmente tiende a exportar teléfonos de mejor calidad o de alguna marca preferida por los importadores. En el caso de Costa Rica y los instrumentos médicos, que componen el 20% de sus exportaciones totales de acuerdo con el OEC; se muestra que este país exporta calidad en el caso de los aparatos de electro diagnóstico, pero importa calidad y marca (diferenciación *horizontal*) en los aparatos de formación de imágenes por resonancia magnética.

4. Discusión

Nuestros resultados empíricos tienen la ventaja de derivarse de un marco teórico único, que explica tanto el comercio de la calidad como el comercio de la diferenciación *horizontal* de los productos. La literatura empírica explica sus resultados del comercio de la calidad con modelos que asumen competencia perfecta, y explica los resultados del comercio *horizontal* con modelos que asumen competencia monopolística. Con la presencia de economías de escala en el comercio internacional, la demanda se torna relevante por lo que tanto las exportaciones como las importaciones pueden reflejar la preferencia por la calidad de los consumidores, elemento que es difícil de capturar con ambos marcos teóricos.

Los índices propuestos a partir de ese marco teórico unificado logran avanzar en la literatura empírica del comercio intrasectorial pues nos permiten no solo estimar la intensidad del comercio intrasectorial, o identificar cuándo este es *vertical* u *horizontal*, como la literatura empírica; sino que nos permiten obtener la dirección de ese comercio intrasectorial. En efecto, nuestros índices pueden capturar cuando se exporta calidad o cuando se exportan marcas o variedades, incluso pueden capturar cuándo se exporta (o importa) productos de alta calidad y de una marca que es fuertemente preferida por los consumidores.

No solo eso, la evaluación empírica y el marco teórico permiten identificar y descomponer el *mark-up* de las firmas ante una situación específica de comercio intrasectorial. Esto puede verse reforzado por la evidencia encontrada por Di Comite, Thisse y Vandenbussche (2014), con datos en el nivel de empresa, y, estiman los *mark-ups* de los productos para aproximar la calidad. Vandenbussche (2014), textualmente menciona: "Mostramos que la calidad puede ir en una dirección diferente a la cuota de mercado, es decir, los productos con las cuotas de mercado más grandes no necesitan tener la más alta calidad." (p.1). Nuestros resultados teóricos y empíricos aceptan esa posibilidad encontrada por los autores.

Conclusiones

La calidad de productos es un elemento que ha debilitado las teorías del comercio internacional. Un elemento clave para tratar de examinar este problema es la organización industrial, teoría que ha estudiado extensamente la calidad de productos. El modelo que el matemático Harold Hotelling le heredó a la economía, podría ayudar a examinar la calidad de productos y, a la par, considerar un mercado internacional dominado por los oligopolios, las barreras a la entrada y el comportamiento estratégico de las firmas.

En este documento, en lugar de considerar un entorno de competencia perfecta o competencia monopolística como se hace en el estudio del comercio internacional, se usó el modelo de Hotelling pues tiene la capacidad de analizar simultáneamente la preferencia por la calidad y la preferencia por la variedad, capturando tanto la calidad como la diferenciación *horizontal* de los productos. En términos generales, el artículo concluye que la calidad de los productos se refleja tanto en los precios como en las cantidades producidas. Su balance, por tanto, puede otorgar información sobre el tipo de diferenciación de producto que se comercia. Por ejemplo, cuando en un mismo producto el precio exportado es mayor al de la importación, pero se importan mayores cantidades

de los que se exportan, se estaría exportando un producto de alta calidad y de una marca o variedad que es fuertemente preferida por los consumidores.

Estos resultados teóricos ayudaron a construir dos índices que logran capturar el balance en precios y cantidades exportadas e importadas de un mismo tipo de producto. A partir de estos indicadores, se desarrolló una evaluación empírica para algunos países y productos seleccionados, tratando de examinar la calidad de productos. Como ejemplos, se puede concluir que Costa Rica tiende a exporta café de alta calidad, tipo *gourmet*, mientras que Brasil importa calidad, es decir, importa café tipo *gourmet*.

Estos resultados son un primer paso para capturar y aproximar a cabalidad el comercio de la calidad de productos. Creemos que es un avance en esa dirección, pero se requiere una validación robusta para una arista más amplia de productos, así como también usar información aún más desagregada para aproximar, con un grado de precisión aún más exacta, los precios de los productos que se encuentran en un nivel plenamente microeconómico.

Referencias

[1] Aturupane, C., Djankov, S. y Hoekman, B. (1999). "Horizontal and Vertical Intra-Industry Trade between Eastern Europe and the European Union". *Review of World Economics* 135(1), 62–81.

[2] Aydinonat, N. y Köksal, E. (2019). "Explanatory value in context: the curious case of Hotelling's location model", *The European Journal of the History of Economic Thought*, 26(5), 879-910, DOI: 10.1080/09672567.2019.1626460.

[3] Azhar, A. y Elliott, R. (2006). "On the Measurement of Product Quality in Intra-Industry Trade". *Review of World Economics*, 142(3), 476–495.

[4] Balart, P. (2021). "Semiorder Preferences and Price-Oriented Buyers in a Hotelling Model", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 188, 394–407.

[5] Baldwin, R. y Harrigan, J. (2011). "Zeros, quality, and space: trade theory and trade evidence". *American Economic Journal: Microeconomics*, 3(2), 60–88. DOI: 10.1257/mic.3.2.60.

[6] Belleflamme, P. y Peitz, M. (2010). *Industrial Organization: Markets and Strategies*, Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Bernard. A., Redding S. y Schott, P. (2011). "Multi-product firms and trade liberalization". *Quarterly Journal of Economics*, 126, 1271-1318. https://doi.org/10.1093/qje/qjr021.

[8] Betancourt, M. (2021). "Tipo de cambio y organización industrial: un canal de transmisión". *Problemas Del Desarrollo. Revista Latinoamericana De Economía*, 52(Especial), 85-110. https://doi.org/10.22201/iiec.20078951e.2021.Especial.69801.

[9] Brodzicki, T., Jurkiewicz, T., Márquez-Ramos, L. y Stanisław U. (2020). "Patterns and determinants of the horizontal and vertical intra-industry trade of regions: panel analysis for Spain & Poland", *Applied Economics*, 52(14), 1533-1552, DOI: 10.1080/00036846.2019.1676871.

[10] Centre for Prospective Studies and International Information (CEPII; 2021). International Trade Database at the Product Level (BACI). Disponible en: http://www.cepii.fr/CEPII/en/bdd_modele/presentation.asp?id=37.

[11] Cieślik, A., y Wincenciak, L. (2018). "Intra-industry trade in differentiated and homogenous commodities: Brander and Krugman models unified". *Equilibrium. Quarterly Journal of Economics and Economic Policy*, 13(1), 29–53. DOI: 10.24136/eq.2018.002.

[12] Costinot, A. y Rodríguez-Clare, A. (2014). Trade Theory with Numbers: Quantifying the Consequences of Globalization, en Gopinath, G., Helpman, E. y K. Rogoff, K. (Eds). *Handbook of International Economics* (pp. 197-261), Oxford: Elsevier.

[13] Di Comite, F., J. Thisse, H. Vandenbussche (2014). "Verti-zontal differentiation in export markets". *Journal of International Economics.* 93 (1), 50-66. https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2014.01.010.

[14] Di Giovanni, J. y Levchenko, A. (2012). "Country Size, International Trade, and Aggregate Fluctuations in Granular Economies", *Journal of Political Economy*, 120(6), 1083– 1132.

[15] Dixit, A., y Stiglitz, J. (1977). "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity". *American Economic Review*, 67(3), 297–308.

[16] Eaton, J. y Grossman, G. (1986). "Optimal Trade and Industrial Policy under Oligopoly". *The Quarterly Journal of Economics*, 101(2), 383–406. https://doi.org/10.2307/1891121.

[17] Falvey, R. (1981). "Commercial policy and intra-industry trade". *Journal of International Economics*, 11(4), 495–511. DOI:10.1016/0022-1996(81)90031-3.

[18] Freund, C. y Pierola, M. (2015). "Export Superstars", *The Review of Economics and Statistics*, 97(5), 1023-1032.

[19] Gabaix, X. (2011). "The Granular Origins of Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 79(3), 733–772.

[20] Greenaway, D., Hine, R. y Milner, C. (1995). "Vertical and Horizontal Intra-Industry Trade: A Cross-Industry Analysis for the United Kingdom." *The Economic Journal*, 105(433), 1505-1518.

[21] Ito, T. y Okubo, T. (2012). "New Aspects of Intra-industry Trade in EU Countries". *The World Economy*, 35(9), 1126-1138. https://doi.org/10.1111/j.1467-9701.2012.01476.x.

[22] Khandelwal, A., Schott, P. y Wei, S. (2013). "Trade liberalization and embedded institutional reform: evidence from Chinese exporters". *American Economic Review*, 103(6), 2169-95. DOI: 10.1257/aer.103.6.2169.

[23] Kim, S. (2012). "Sequential Quality and Price Competition in Hotelling Model". *Journal of Economic Theory and Econometrics*, 23(2), 143-164.

[24] Krugman, P. (1979). "Increasing Returns, Monopolistic Competition and International Trade." *Journal of International Economics* 9 (4), 469–479.

[25] Lancaster, K. (1980). "Intra-industry trade under perfect monopolistic competition". *Journal of International Economics*, 10(2), 151–175. doi:10.1016/0022-1996(80)90052-5.

[26] Lahiri, S., y Ono, Y. (2003). *Trade and Industrial Policy under International Oligopoly*. Cambridge: Cambridge University Press.

[27] Leahy, D. y Neary, J. (2020). "When the threat is stronger than the execution: trade and welfare under oligopoly". *CESifo Working Paper Series 8481*.
[28] Le Duc, N. y Taegi, K. (2020). "Trade of Vertically Differentiated Products, Quality Improvement, and Welfare". *Seoul Journal of Economics*, 33(2), 99-119.
[29] Ma, C. y J. Burgess (1993). "Quality competition, welfare, and regulation", *Journal of Economics*, 58(2), 153–173.
[30] Mayer, T. y Ottaviano, G. (2008). "The Happy Few: The Internationalisation of European Firms", *Intereconomics: Review of European Economic Policy* 43 (3), 135–148.
[31] Melitz, M. (2003). "The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity". *Econometrica*, 71(6), 1695–1725. doi:10.1111/1468-0262.00467.
[32] Montefiori, M. (2005). "Spatial Competition for Quality in the Market for Hospital Care". *The European Journal of Health Economics*, 6(2), 131–135.
[33] Mukerji, P., y Panagariya, A. (2019). "Investigating the composition of product-level specialization". *Indian Economic Review*. 54, 3–18. https://doi.org/10.1007/s41775-019-00047-4.
[34] Nakanishi, N. (2018). *The Essence of International Trade Theory*. New Jersey: World Scientific.
[35] Neary, J. (2016). "International trade in general oligopolistic equilibrium". *Review of International Economics*, 24(4), 669-698. doi:10.1111/roie.12233.
[36] Pepall, L., Richards, D. y Norman, G. (2014). *Industrial Organization: Contemporary Theory and Empirical Applications*. Estados Unidos: Wiley.
[37] Ros, J. (2015). "¿Por qué cae la participación de los salarios en el ingreso total en México?". *Economía Unam*, 12(36), 3-15.
[38] Schott, P. (2004). "Across-Product versus Within-Product Specialization in International Trade". *The Quarterly Journal of Economics*, 119(2), 647–678.
[39] Song, Y., Wu, Y., Deng, G. y Deng, P. (2021). "Intermediate imports, institutional environment, and export product quality upgrading: evidence from Chinese micro-level enterprises". *Emerging Markets Finance and Trade*, 57:2, 400-426, DOI: 10.1080/1540496X.2019.1668765.
[40] The Observatory of Economic Complexity (OEC; 2021). Disponible en: https://oec.world/
[41] Vandenbussche (2014). "Quality in exports". *European Commission Economic Papers 528*.
[42] Zhang, T., Yixue, H. Zhang, X. y Shuai, J. (2018). "Endogenous third-degree price discrimination in Hotelling model with elastic demand". *Journal of Economics*, 27, 125–145. https://doi.org/10.1007/s00712-018-0635-z.
Zhou, H. (2010). "A Ricardian model of international trade with oligopolistic competition". *The Journal of International Trade & Economic Development*, 19(4), 499–515.

Ensayos Revista de Economía, 41(2), 193-211, Noviembre 2022
DOI: http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-4

UANL ®

ENSAYOS Revista de Economía

ensayos.uanl.mx

Facultad de Economía

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN □ FACULTAD DE ECONOMÍA □ CENTRO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

Probando supuestos del modelo Flegg para regionalizar matrices insumo-producto

Testing Flegg model assumptions for regionalizing input-output tables

Edgardo Arturo Ayala Gaytán[*]
Miriam Valdés Ibarra[**]

Información del artículo

Recibido:
20 octubre 2021

Aceptado:
31 octubre 2022

Clasificación JEL:
C67, O18, R15, D57.

Palabras clave:
matriz regional insumo-producto, regionalización por cuotas, fórmula FLQ, métodos indirectos.

Resumen

El método FLQ es uno de los más populares para obtener matrices insumo-producto regionales, debido a que requiere de poca información y a su precisión. En este trabajo, los supuestos del método son contrastados econométricamente con información de nueve países europeos y de la Unión Europea. Se encuentra que, la elasticidad de la cuota cruzada es la mitad de lo previsto por la fórmula original; además, las cuotas simples del sector vendedor son más importantes que las del comprador. Aun así, el poder predictivo del FLQ es ligeramente inferior a modelos más complejos, lo que reivindica su eficiencia práctica.

[*] Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey; edgardo@tec.mx
[**] Universidad Autónoma de Coahuila; miriam.valdes@uadec.edu.mx
ISSN Electrónico: 2448-8402 | ISSN Impreso: 1870-221X | ©2022 Los autores

Citar así: Ayala Gaytán, E. A. & Valdés Ibarra, M. (2022). Probando supuestos del modelo Flegg para regionalizar matrices insumo-producto. *Ensayos Revista de Economía*, 41(2), 193-211, http://dx.doi.org/10.29105/ensayos41.2-4

Article information

Received:
20 October 2021

Accepted:
31 October 2022

JEL Classification:
C67, O18, R15, D57.

Keywords:
Regional input output tables, Regionalization by quotas, FLQ Formula, Indirect methods.

Abstract

Flegg's location quotient (FLQ) is one of the most popular non-survey methods for obtaining regional input-output tables. This method is widely adopted due to the minimum information requirements and the precision and accuracy of estimates. In this work, the assumptions of the method are econometrically contrasted with information from European Union and nine European countries. It is found that the simple location quotas of the seller's sector are more important than the ones of the buyers. Still, the FLQ model's predictive power is only slightly lower than more complex models, which reinforces the practical efficiency of the FLQ formula.

Introducción

El método de coeficiente de localización de Flegg (Flegg, Webber y Elliott, 1995) ha sido ampliamente utilizado para obtener matrices insumo-producto regionales. En Colombia, por ejemplo, destaca el uso de esta técnica para la identificación de sectores clave en la región del Caribe colombiano (Ramos, Polo y Arrieta, 2017), la determinación de las actividades con mayor impacto macroeconómico en la economía de Boyacá (Sanabria-Bautista y Cely-Acero 2018) y la detección de los efectos multiplicadores y flujos intersectoriales relevantes para la economía de Colombia en su conjunto (Gaytán y Del Pilar, 2017). En México se ha empleado esta metodología en la construcción de matrices insumo-producto y contabilidad social para estados y regiones (Dávila y Valdés, 2012; Dávila, 2015 y 2019), para estudiar diversos fenómenos como energía (Ayala, Chapa y Treviño, 2015), efectos regionales del libre comercio (Ayala, Chapa, Treviño, Matteo y Pérez, 2015) y cuestiones de equidad de género (Chapa y Ayala, 2018 y 2019), entre otros. Así también, su uso abarca la construcción de un modelo insumo-producto para la ciudad de Buenos Aires, Argentina (Mastronardi y Romero, 2012), el análisis de coeficientes de localización para Córdoba, Argentina (Romero, Mastronardi y Faye, 2012; Flegg, Mastronardi y Romero, 2015) y el estudio del subsidio al sector silvícola de la región del Biobío, Chile (Mardones y Hernández, 2017).

El método es muy sencillo de aplicar y requiere de solo dos piezas de información, la matriz insumo-producto nacional y un vector de empleo o valor agregado sectoriales para la región en cuestión. En cambio, aún y cuando el método de entropía cruzada sólo requiere el vector de producción regional, involucra la solución de un problema de programación lineal que pudiera tener

problemas de convergencia (ver Lamonica, Rechionni, Chelli y Salvati, 2019), y otros como como el RAS, qué es fácil de implementar, requieren los vectores de producción y de demanda intermedia intrarregional (ver Temursho, Oosterhaven y Cardenete, 2020).

Si bien existen otros métodos de cuotas que usan la misma información, diferentes estudios que comparan las estimaciones de los métodos de cuotas contra matrices obtenidas por métodos directos (e.g. Flegg y Thomo, 2011, 2016a y 2016b) o mediante simulaciones de Monte Carlo (Bonfiglio y Chelli, 2008), tienden a concluir que el método de Flegg et al. es el más preciso.

No obstante, visualizando el método de Flegg et al. (1990) como modelo, este propone varias hipótesis implícitas, entre ellas que el parámetro del modelo del factor del tamaño de la región debe ubicarse entre cero y uno, que a mayor cuota de industria cruzada (CIQ por sus siglas en inglés) mayor debe ser el coeficiente intrarregional, que la elasticidad del CIQ, así como la de los coeficientes nacionales con respecto a los coeficientes intrarregionales debe ser uno, entre otras.

Hasta donde conocemos, no se ha probado empíricamente si estas hipótesis se confirman en la realidad. El presente artículo pretende contribuir en esta línea de investigación, contrastando empíricamente el modelo de Flegg en su formulación original con un modelo que no restringe las elasticidades de los coeficientes intrarregionales al CIQ, o en su caso las cuotas de localización del sector vendedor y comprador, y los coeficientes técnicos nacionales.

Debido a que no se tiene acceso a una matriz insumo-producto nacional y a las matrices de sus regiones obtenidas con base en encuestas, el ejercicio se realiza asumiendo que la Unión Europea (EU por sus siglas en inglés) es el estado-nación y los países que la conforman son las regiones sub-nacionales. Para ello, se utilizan las matrices insumo-producto del Sistema de Cuentas Nacionales Europeo, esto es, la matriz insumo-producto del agregado de 17 países de la Unión Europea (EU17) y las matrices de nueve países que eran comparables con la matriz agregada.[1] Consideramos que esta estrategia es válida dada la alta integración económica y política de la EU, de hecho, la política regional de la EU tiene por objetivo esencial la cohesión económica y social[2], esto es, lograr mayor igualdad de productividad e ingreso a través de sus regiones.[3]

[1] Bélgica, Alemania, Estonia, Irlanda, Francia, Italia, Austria, Eslovenia y Eslovaquia.
[2] Ver https://derechoeuropeo.leyderecho.org/objetivo-n-1/
[3] Existe evidencia de que los países que conforman la EU mostraron un proceso de convergencia en ingresos que se detuvo en los años ochenta (Cappelen, Castellacci y

La siguiente sección contiene una breve revisión de las aplicaciones del método de Flegg et al. Posteriormente, examinamos el método de un modelo más general donde se flexibilizan los parámetros y se permite un componente estocástico, esto con el fin de evaluar las hipótesis implícitas del método, así como las restricciones que deben satisfacer. Finalmente, se estima econométricamente el modelo generalizado para probar si las hipótesis y las restricciones del método se cumplen en un sentido estadístico. Concluimos que el método de Flegg et al. en su forma original sigue siendo razonablemente preciso a un costo más bajo, pero el ejercicio muestra que no todas las hipótesis del modelo se cumplen, lo que sugiere nuevas líneas para desarrollar otros métodos indirectos.

EL MÉTODO DE FLEGG

1. Revisión de la literatura

Entre los métodos indirectos más utilizados para obtener estimadores de los coeficientes técnicos intrarregionales se encuentran los métodos denominados de cuota, el de Flegg et al. (1995) es un caso especial. En general, esta familia de métodos propone obtener los coeficientes técnicos intrarregionales de acuerdo con (1):

$$a_{ij}^{rr} = \begin{cases} \alpha_{ij}^{r} a_{ij}^{n} & si\ \alpha_{ij}^{r} < 1 \\ a_{ij}^{n} & si\ \alpha_{ij}^{r} \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Donde definimos el coeficiente insumo-producto a_{ij}^{rr}, como las compras en pesos del insumo i, realizadas para producir un peso del sector j, donde tanto el proveedor como el comprador son de la misma región r, i.e. la primera r del supra índice denota la procedencia del vendedor y la segunda del comprador. Mientras que a_{ij}^{n} es el coeficiente técnico nacional de la matriz de transacciones domésticas. El parámetro α_{ij}^{r} es el factor de ajuste que diferencia cada uno de los métodos de cuota. En general el factor refleja la abundancia del producto j en la región, de forma que mientras mayor sea, más contenido regional tendrá la compra, y pasando cierto umbral, que por lo general se define

Verspage, 2003). Para apoyar la igualdad de ingresos entre regiones, a partir de 1989, el objetivo 1 de los fondos estructurales de la EU establece entregar un apoyo a regiones que cuentan con un ingreso per cápita menor al 75% del ingreso per cápita promedio de la EU (Espositi y Bussoletti, 2008). En el caso de este apoyo, las regiones se definen como los territorios delimitados de nivel NUTS II en la Nomenclatura de Unidades Territoriales Estadísticas que ha elaborado Eurostat, esto es, el objetivo de igualdad de la EU va más allá de igualdad entre países.

en uno, todo el requerimiento técnico, que es igual al nacional porque tienen la misma tecnología, se surte dentro de la región.
Dos métodos muy comunes para determinar el parámetro α_{ij}^r son el de cuota simple, donde $\alpha_{ij}^r = SLQ_i^r = \frac{x_i^r / x^r}{x_i^n / x^n}$ y el de cuota cruzada donde $\alpha_{ij}^r = CIQ_{ij}^r = \frac{SLQ_i^r}{SLQ_j^r}$.

La cuota de localización simple o SLQ (por sus siglas en inglés) es la razón de la proporción de la producción (denotado por x) del sector i en la región r, en la producción total de la región en comparación nacional de ese sector. Es una variable que refleja tamaño o ventaja comparativa del sector i, que es el vendedor, en la región r. Si es mayor a 1, significa que el sector i es más importante en la región, es decir, se revela que la región tiene ventaja en la producción del sector i. Si es menor a 1 entonces es más bien pequeño por lo que hay que ajustar hacia abajo el coeficiente nacional. La cuota cruzada define el factor de ajuste no en términos absolutos de la cuota simple del vendedor, sino en términos relativos al "tamaño" del comprador, el sector j. Es decir, un sector vendedor i puede tener una SLQ_i de 0.4, pero si el que compra tiene una SLQ_j más pequeña, digamos 0.2, entonces la relación es 2, lo que indica que la oferta local basta y sobra para la reducida demanda de la región.

Flegg et al. (1995) y Flegg y Webber (1997) reconocieron que la cuota cruzada puede ser un avance sobre la simple, pero tiene el problema de no incorporar el tamaño de la región, lo cual es una omisión importante. Esto es así porque las regiones relativamente más pequeñas tienden a importar más de otras regiones, o de otros países, que las más grandes. Este hecho puede deberse a las economías a escala: en este contexto las regiones con mercados más grandes tienden a desarrollar más proveedores locales para la región más autosuficiente. Esta omisión en los métodos de cuotas simple y cruzada podría ser la causa de la sobrestimación de los coeficientes técnicos y los multiplicadores de producto cuando se contrastaban este tipo de estimaciones con los que se obtienen con base en métodos directos.

Así, Flegg y Webber (1997) proponen el siguiente ajuste sobre la cuota de localización cruzada:

$$FLQ_{ij}^r = \left[log_2\left(1 + \frac{x^r}{x^n}\right)\right]^\delta CIQ_{ij}^r; donde\ 0 < \delta \leq 1 \qquad (2)$$

Y los coeficientes intrarregionales se obtendría de acuerdo con la siguiente regla:

$$a_{ij}^{rr} = \begin{Bmatrix} FLQ_i^r\, a_{ij}^n \\ a_{ij}^n \end{Bmatrix} \begin{matrix} | si\ FLQ_i^r < 1 \\ | si\ FLQ_i^r \geq 1 \end{matrix} \quad (3)$$

El método propuesto soluciona el problema de la sobrestimación de los métodos de cuota simple y cruzada al costo de tener que estimar un parámetro, en este caso δ. Mientras más cercano a cero, menor el ajuste, de hecho, en cero coincide con el de cuota cruzada. Mientras más cercano a uno, mayor es el ajuste hacia abajo en los contenidos regionales. ¿Cómo obtener estimaciones de δ? La práctica ha sido la de estimar la δ óptima en los casos donde se tengan matrices insumo-producto construidas con métodos directos, es decir se estiman los coeficientes intrarregionales con base en la ecuación (2) y (3) para diferentes valores de δ, y se comparan los coeficientes estimados o los multiplicadores de producto contra los "correctos" que son los que se obtienen de la matriz resultante de las encuestas. Se elige la δ que minimiza los errores de estimación.

Con base en los casos de Peterbourough en 1969 y de Escocia en 1989, Flegg y Webber (1997 y 2000) propusieron que un valor de $\delta = 0.3$ es razonable para el método Flegg. En otro estudio para 20 regiones finlandesas Flegg y Thomo (2011) obtuvieron un valor óptimo de $\delta = 0.25$, y en Flegg y Thomo (2016b) se obtuvo que los valores de deltas óptimos para las regiones de Gyeongbuk y Daegu de Corea del Sur eran de 0.4 y 0.35 respectivamente.

Otra forma de arribar al parámetro δ es utilizar simulaciones de Monte Carlo. Bonfiglio y Chelli (2008) obtuvieron mil matrices simuladas estocásticamente para 20 regiones y las agregaron para obtener la nacional, después usaron los métodos de Flegg para volver a regionalizar las matrices obteniendo una nueva estimación para diferentes valores de δ. Comparando las 20 mil matrices regionales "correctas" y sus contrapartes "estimadas", obtuvieron el valor esperado de las δ óptimas fue de 0.324 para el método Flegg con un error estándar de 0.11.

Si bien la evidencia da soporte para pensar en que δ se ubica en la vecindad de 0.3 y de 0.4 en el método aumentado, hay que reconocer que en la región de Finlandia de Keski-Pohjanmaa Thomo (2004) encontró una δ menor a 0.1, y en la región de Córdoba en Argentina Flegg, Mastronardi y Romero (2015) encontraron una delta óptima también de 0.1. En el otro extremo, Bonfiglio (2009) estimó deltas óptimos muy por arriba de los valores comúnmente empleados: 0.66 y 0.79 para la región de Marche de Italia.

De esta forma, la práctica más habitual ha sido emplear el método de Flegg para regionalizar matrices insumo-producto en caso de no disponer ninguna otra información a nivel regional, y se asume un valor de δ de 0.25 o 0.3, en las matrices regionales que se construyeron. Chapa y Ayala (2018) realizaron un ejercicio de sensibilidad de los resultados variando el parámetro en un intervalo de 0.2 a 0.4, estimándose una variación promedio en los multiplicadores de un 5%.

Siguiendo esta práctica, el método se ha aplicado en México para construir matrices insumo-producto de las mesoregiones (Dávila y Valdés 2012; Dávila 2015); para construir matrices de contabilidad social regionales (Dávila 2015; González, de la Cruz y Neri 2020); para estimar los impactos del agotamiento de los pozos petroleros de Campeche (Ayala, Chapa y Treviño 2015); para estimar el impacto del libre comercio en la zona noreste (Ayala, Chapa, Treviño, Matteo y Pérez 2015); para identificar encadenamientos productivos en regiones mineras de México (Gaytán, Mendoza y Vargas 2018); para estimar el impacto de la industria automotriz en las regiones económicas de México (Torre, Alvarado y Quiroga 2017); para determinar interdependencias productivas (Vera y Langle 2019) y para construir matrices de contabilidad social para cuatro regiones de México con una perspectiva de género (Chapa y Ayala 2018).

2. Generalizando el método de Flegg: desarrollo de hipótesis

El método de Flegg definido por las ecuaciones (2) y (3) ha probado ser muy útil y de razonable precisión ante la falta de información regional específica, esas ventajas se dan al costo de solo tener que estimar o asumir un parámetro. Sin embargo, para lograr esta simplificación, el modelo asume implícitamente algunos otros supuestos, en especial los siguientes:

1. La relación entre los coeficientes técnicos intrarregionales y el CIQ es positiva y lineal con una elasticidad de los coeficientes intrarregionales al CIQ de uno;
2. Dado que el CIQ es la razón de los SLQ, entonces las elasticidades de los coeficientes intrarregionales al SLQ del sector vendedor es 1, y la del sector comprador es -1;
3. Finalmente, la relación con el coeficiente nacional es positiva, lineal, y su elasticidad es uno.

Para determinar las hipótesis implícitas al método de regionalización de Flegg et al., conviene presentar un modelo más general, tal y como los que se

presentan en las ecuaciones (4) y (5). En estas expresiones añadimos un término estocástico ε_{ij}^{r}, que captura las diferencias en los coeficientes técnicos intrarregionales que no pueden ser explicado por la tecnología nacional, la especialización (vía el CIQ o los LQ) o el tamaño de las regiones. Asumimos que el valor esperado del residual es cero y su dispersión constante, $E(\varepsilon_{ij}^{r}) = 0, Var(\varepsilon_{ij}^{r}) = \sigma_{\varepsilon}^{2}$.

Adicionalmente, liberamos el valor de las elasticidades de los coeficientes intrarregionales al CIQ, el SLQ del vendedor y del comprador y la de los coeficientes técnicos nacionales, y asumimos que éstas son constantes, pero con valores indeterminados expresados por $\beta, \beta_V, \beta_C \; y \; \gamma$, respectivamente.

$$a_{ij}^{rr} = \left[log_2\left(1 + \frac{x^r}{x^n}\right)\right]^{\delta} (CIQ_{ij}^{r})^{\beta}(a_{ij}^{n})^{\gamma} + \varepsilon_{ij}^{r} \quad (4)$$

$$a_{ij}^{rr} = \left[log_2\left(1 + \frac{x^r}{x^n}\right)\right]^{\delta} (SLQ_{i}^{r})^{\beta_V}(SLQ_{j}^{r})^{\beta_C}(a_{ij}^{n})^{\gamma} + \varepsilon_{ij}^{r} \quad (5)$$

En este marco, las elasticidades instantáneas del valor esperado de la distribución de los coeficientes técnicos intrarregionales con respecto a los índices de las cuotas y los coeficientes técnicos nacionales son las siguientes: en (4) $\frac{\partial lnE(a_{ij}^{rr})}{\partial lnCIQ_{ij}^{r}} = \beta, \frac{\partial lnE(a_{ij}^{rr})}{\partial lna_{ij}^{n}} = \gamma$, mientras que de (5) tenemos que $\frac{\partial lnE(a_{ij}^{rr})}{\partial lnSLQ_{i}^{r}} = \beta_V, \frac{\partial lnE(a_{ij}^{rr})}{\partial lnSLQ_{j}^{r}} = \beta_C$. Nótese también, que la delta del método de Flegg puede interpretarse como la elasticidad de los coeficientes intrarregionales con respecto a la variable $\left[log_2\left(1 + \frac{x^r}{x^n}\right)\right]$, que es una transformación del tamaño relativo de la región.

Sin embargo, delta no nos da una medición del cambio porcentual en los coeficientes intrarregionales cuando cambia en el tamaño de la región en sí. En cambio, $\frac{\partial E(a_{ij}^{rr})}{\partial s^{r}} \frac{1}{E(a_{ij}^{rr})}$ sí nos da el cambio porcentual en los coeficientes técnicos regionales cuando aumenta un punto porcentual el tamaño relativo de la región. Puede demostrarse que este parámetro es igual a $\delta(\frac{1}{1+s^r})(\frac{1}{log_2(1+s^r)})log_2(e)$, donde "e" es la constante de Napier, es positiva, i.e. al aumentar el tamaño de la región aumentan los coeficientes intrarregionales, pero es una función decreciente del peso de la región en la economía nacional, $s^r = \frac{x^r}{x^n}$. Ésta tiende a infinito si $s^r \to 0$, y a 0.7δ si $s^r \to 1$.

Comparando el método de Flegg con las especificaciones (4) y (5), es claro que el método asume que $\beta = 1 \,\&\, \gamma = 1$, en la especificación (4), y $\beta_V = 1 \,\&\, \beta_C = -1 \,\&\, \gamma = 1$, en la especificación (5). ¿Es la evidencia consistente con estos supuestos? ¿Baja sensiblemente la precisión del modelo de Flegg si no se llegan a cumplir los supuestos? ¿Vale la pena asumir el costo de tener que estimar más parámetros que el coeficiente delta?

3. Regionalizando países europeos

Para contrastar las hipótesis implícitas del modelo de Flegg requerimos de un conjunto de datos. Debido a la escasez de matrices insumo-producto regionales elaboradas mediante métodos directos, optamos por realizar el contraste empírico con base a las matrices de los países de la EU17. Aparte de la gran ventaja de contar con las matrices de cada país y la agregada de toda la región, puede argumentarse que, por la notable integración económica de estos países, el bloque puede tomarse como una aproximación de regiones dentro de un estado nación. Este enfoque ha sido adoptado en otras contribuciones, por ejemplo, en los estudios de convergencia Barro y Sala-i-Martin (1992) comparan la convergencia de los estados de Estados Unidos con la que se da entre las diferentes regiones de Europa, tomando a todo el continente como un solo estado nación. Jahn (2017), por otro lado, estima un modelo gravitacional para los flujos comerciales de los diferentes países europeos y usa los coeficientes estimados para predecir los intercambios entre diferentes regiones de Alemania.

Admitimos que las escalas cambian, como los países son más grandes que las regiones, estados o ciudades, seguramente estarán más diversificados y tendrán menos propensión a importar mercancías de los otros países, en comparación con lo que sucede con las regiones. De ser este el caso, lo que esperamos es que el coeficiente δ óptimo disminuya sensiblemente, posiblemente por debajo del rango de 0.1 a 0.4 que mencionamos en la revisión de literatura. Aun así, como quiera, es posible todavía contrastar las hipótesis sobre el CIQ, los SLQ's y el coeficiente técnico nacional, que es el objetivo del presente trabajo.

Usamos las matrices insumo-producto del Sistema de Cuentas Europeas (ESA por sus siglas en inglés) disponible en Eurostat, tanto para la EU17 en su conjunto, así como para nueve de los diecisiete países de la EU17 que cuentan con las bases de datos en las mismas condiciones de comparabilidad respecto a la agregada de la EU (año y nivel de desagregación): Bélgica, Alemania,

Estonia, Irlanda, Francia, Italia, Austria, Eslovenia, Eslovaquia[4]. Todas las matrices corresponden al año 2010 con base a la metodología de ESA 95, ya que es el último año para el cual está publicada la matriz agregada de la EU, debido a que en ESA 10 no está disponible la matriz agregada. En todas las matrices se empleó la misma desagregación sectorial correspondiente a 63 actividades económicas.

En la mayor parte de las aplicaciones de los métodos de regionalización se parte de una matriz nacional para estimar multiplicadores regionales. En esta investigación se parte de una matriz insumo-producto correspondiente a un conjunto de países, la cual tendrá la función de la matriz "nacional", para poder derivar coeficientes "intrarregionales", que en realidad serán los coeficientes domésticos de cada uno de los países integrantes de la EU contemplados en este análisis.

Hay que tomar en cuenta que los países contemplados seguramente tienen una dinámica económica distinta a la que tendrían algunas regiones a escala subnacional, debido a mayores barreras al comercio interregional y a que los países tienden a ser más autosuficientes que las regiones. Esto último es evidente en la tabla 1, que muestra los Índices de Herfindahl-Hirschman (IHH), una de las medidas más populares de concentración económica y que oscila en un rango de 0 (nula concentración) a 10, 000 (concentración máxima). Como puede observarse, en casi todos los países incluidos en el análisis los IHH son menores a 400, cifra que sugiere una diversificación importante, no obstante que los países estudiados difieren en forma importante en tamaño, donde se destacan Alemania, Francia e Italia, que concentran el 26%, 21% y 16% del valor agregado de la EU17; en contraste con el resto de los seis países, los cuales tienen una participación menor al 4%.

4. Contrastación empírica del modelo de Flegg sin restricciones

La estrategia de contraste de las hipótesis, o supuestos, del modelo de Flegg en el contexto europeo consiste en estimar econométricamente las ecuaciones (4) y (5), donde las regiones son los nueve países considerados, desplegados a 63 actividades económicas. De esta forma, estimamos las cuotas de localización simples (SLQ_i^r) para cada país-sector de acuerdo con la razón de los pesos de cada sector en el país en comparación al de la EU17. La cuota cruzada, o CIQ_{ij}^r, se estima dividiendo la cuota simple del sector vendedor entre el del comprador, y en los casos en que coinciden los sectores se sustituye por la cuota simple del vendedor (ver Miller y Blair 2009). Los coeficientes

[4] Además de los países mencionados en la EU17 se consideran: República Checa, Grecia, Lituania, Hungría, Polonia, Rumania, Suiza, Reino Unido.

intrarregionales de cada país se toman de su matriz insumo-producto doméstica, y los nacionales de la matriz doméstica de la EU17. El tamaño relativo se estima como la razón del valor agregado total del país en cuestión al total de la EU17, mismo que es reportado en la tabla 1.

Tabla 1
Contribución al valor agregado de la EU17 e Índice de Herfindahl-Hirschman (2010)

	Contribución al Valor Agregado	Índice Herfindahl-Hirschman
Alemania	0.2646	410
Austria	0.0304	360
Bélgica	0.0376	390
Eslovaquia	0.0071	400
Eslovenia	0.0037	340
Estonia	0.0015	350
Francia	0.2061	380
Irlanda	0.0169	400
Italia	0.1646	360
Promedio	0.0814	377

Fuente: elaboración propia a partir de información de Eurostat

La estimación econométrica de las especificaciones (4) y (5) presenta dos dificultades. La primera de ellas se refiere a cómo introducir el término estocástico, en principio puede ser en forma aditiva, tal y como se expone en (4) y (5), de forma que el modelo es no-lineal y no puede transformarse en uno lineal simplemente aplicando una transformación logarítmica. Alternativamente, existe la posibilidad de introducir un residual multiplicativo del tipo $e^{u_{ij}^r}$, tomar logaritmos naturales, hacer lineal en logaritmos el modelo y correr la regresión de mínimos cuadrados ordinarios.

Ambas opciones son en principio válidas, decidimos quedarnos con la que predice mejor los coeficientes técnicos intrarregionales (no su logaritmo), es decir experimentamos corriendo los modelos en las dos versiones, la no-lineal que minimiza $\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_{ij}^r)^2$, y la doble-logarítmica, lineal, que minimiza $\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(u_{ij}^r)^2$. En todos los casos, los criterios de evaluación de la predicción de los coeficientes intrarregionales a_{ij}^{rr}, tales como el MAE[5],

[5] El MAE es el *mean absolute error* y se estima como el promedio de las desviaciones absolutas entre cada coeficiente técnico intrarregional observado y el que predice el modelo.

indicaron que el modelo no lineal es más preciso. Por esta razón dejamos la especificación no-lineal, y se utilizó un algoritmo Gauss-Newton con un *step-method* Marquandt y un límite de convergencia de 0.0001 para obtener las estimaciones mínimo-cuadráticas[6].

La segunda dificultad radica en acotar la muestra de observaciones que deben incluirse en la estimación. Los métodos de cuotas estiman un coeficiente intrarregional siempre y cuando la cuota relevante (simple, cruzada o de Flegg) sea menor a la unidad, una vez que rebasa ese límite, la estimación es exactamente el coeficiente nacional. Por tal motivo, la muestra relevante para la estimación debe ser aquella donde $FLQ_i^r < 1$, pero el problema es que FLQ depende de delta en el modelo de Flegg, y en las expresiones (4) y (5) del resto de los parámetros, y precisamente queremos delimitar la muestra para estimar los coeficientes. Entramos en un problema de circularidad, requerimos datos para estimar los coeficientes, pero dependiendo de éstos debemos de delimitar la muestra de datos.

Para resolver esta circularidad decidimos emplear dos alternativas, que como se verá arrojan resultados semejantes. En una primera instancia, integramos la muestra con las observaciones donde la cuota cruzada CIQ_{ij}^r es menor a 1. Esto tiene la ventaja de ser sencillo, rompemos la circularidad y al fin y al cabo el principal ingrediente del método de Flegg es la cuota cruzada.

La segunda forma de delimitar la muestra es a través de un proceso iterativo. En el primer paso estimamos los modelos (4) y (5) con mínimos cuadrados no lineales para los datos donde $CIQ_{ij}^r < 1$ y obtenemos estimaciones de los parámetros de la primera ronda. En el paso dos, con las estimaciones de la ronda 1, construimos las cuotas de Flegg, y reestimamos los modelos ahora para las observaciones donde $FLQ_{ij}^{r(1)} < 1$, donde el (1) de supra índice indica que es la cuota de la ronda 1. Como la muestra cambió, en el paso tres se vuelve

Por ejemplo, el MAE de la ecuación (4) cuando restringimos la muestra a las observaciones donde el CIQ<1 del modelo doble logarítmico (o con residuos exponenciales) es de 0.00519 mientras que para el modelo no lineal es de 0.00325, una diferencia de aproximadamente 60%. Cabe aclarar que el mismo patrón ocurre para todas las especificaciones que dependen de las restricciones que hagamos sobre los coeficientes y para los dos tipos de muestras consideradas, es decir en total para 10 especificaciones diferentes. Asimismo, la selección del modelo no cambia si tomamos el *Root Mean Square Error* (RMSE) o el *Sum of Square of Residuals* (SSR) como criterio en todos los casos, para la ecuación (4) con muestra de CIQ<1 que mencionamos el RMSE de la versión doble logarítmica es 0.01820 y de 0.01100 para la versión no lineal (diferencia de 65%) y los SSR son respectivamente 6.037 y 2.197. Debido a que se tratan de muchos estadísticos de bondad de ajuste, éstos no se incluyen en el texto, pero están disponibles bajo solicitud directa a los autores.

[6] Para este fin utilizamos el paquete econométrico de Eviews 11.0, se puede consultar el manual de este software ampliamente conocido para revisar los detalles técnicos de este algoritmo.

a estimar el modelo y se construye la cuota $FLQ_{ij}^{r(2)}$. En el paso cuatro, se estima el modelo con la muestra que cumple con $FLQ_{ij}^{r(2)} < 1$, y así sucesivamente. En cada estimación, se revisa la cuota de Flegg con los parámetros obtenidos, se delimita nuevamente la muestra y se procede a volver a estimar. El proceso lo realizamos hasta que los coeficientes no cambiaran en más de 0.01.

Las estimaciones para la muestra donde las cuotas cruzadas son menores a 1 se presentan en la tabla 2 y las que se obtienen mediante el método iterativo en la tabla 3. En ambas tablas se presentan cinco modelos distintos, los primeros tres corresponden a la ecuación (4), liberando un parámetro a la vez, y los dos últimos a la ecuación (5). Es decir, la estimación de la columna (1) libera el parámetro δ en la ecuación (4), por lo que aparece el coeficiente estimado y su error estándar abajo del mismo, mientras que los parámetros β y γ se restringen a 1 por lo que su coeficiente toma el valor de 1 pero no hay un error estándar dado que no se trató de una estimación. Así se interpretan el resto de las estimaciones.

Tabla 2
Estimación de los modelos de Flegg con la muestra donde CIQ<1

	Muestra con observaciones donde CIQ<1				
Variable	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**
Tamaño	0.022978***	0.057181***	0.073325***	0.081276***	0.092391***
	(0.002003)	(0.002677)	(0.003493)	(0.002508)	(0.00349)
CIQ	1.0000	0.536315***	0.580158***		
		(0.017887)	(0.019069)		
SLQ vendedor				0.516589***	0.564295***
				(0.023949)	(0.026143)
SLQ comprador				-0.164005***	-0.203183***
				(0.02068)	(0.022468)
Nacional	1.0000	1.0000	0.966888***	1.0000	0.977975***
			(0.004244)		(0.004483)
N	18232	18232	18232	18232	18232
SSR	2.2763	2.2041	2.2041	2.2503	2.2472
SE	0.0112	0.0110	0.0110	0.0111	0.0111
R2	0.5302	0.5451	0.5466	0.5355	0.5362
R2 adjusted	0.5302	0.5450	0.5466	0.5355	0.5361
Criterio Información Schwarz	-6.149988	-6.181656	-6.184515	-6.16039	-6.161208

Nota: ***p<0.01, **p<0.05, *p<0.1
Fuente: elaborado por los autores con información del Eurostat

Tabla 3
Estimación de los modelos de Flegg con la muestra donde FLQ<1

	Muestra con observaciones donde FLQ<1				
Variable	**(6)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
Tamaño	0.01909***	0.047107***	0.065075***	0.063325***	0.071596***
	(0.001727)	(0.001596)	(0.002578)	(0.001435)	(0.002511)
CIQ		0.567577***	0.502405***		
		(0.014955)	(0.013311)		
SLQ vendedor				0.58665***	0.611868***
				(0.018514)	(0.018544)
SLQ comprador				-0.240529***	-0.253047***
				(0.015988)	(0.015705)
Nacional	1.0000	1.0000	0.983571***	1.0000	0.984246***
			(0.003719)		(0.00353)
N	19390	23284	25347	27284	27723
SSR	2.6606	3.9183	4.2653	4.6310	4.746407
SE	0.0117	0.0130	0.0130	0.0130	0.013086
R2	0.5518	0.5396	0.5459	0.5498	0.550969
R2 adjusted	0.551753	0.539589	0.545841	0.549771	0.550921
Criterio Información Schwarz	-6.055591	-5.85113	-5.850837	-5.842289	-5.833277

Nota: ***p<0.01, **p<0.05, *p<0.1
Fuente: elaborado por los autores con información del Eurostat

En general las estimaciones son del mismo orden de magnitud para los dos métodos que empleamos, aquel que restringe la muestra a las observaciones donde CIQ<1 y el método iterativo donde en cada paso se estiman los parámetros del modelo en cuestión y con ellos se construyen las cuotas de Flegg. Las estimaciones de la delta crecen en ambas estimaciones a medida que liberamos el resto de los parámetros, en el primer caso de 0.02 hasta 0.09, y con el segundo método de 0.02 a 0.07; consistente con el modelo, la delta es positiva y significativamente diferente de cero, y como esperábamos, se tratan de deltas pequeñas ya que los países tienden a ser más diversificados que las regiones.

Los coeficientes del CIQ se ubican en un rango de 0.50 a 0.58 en las columnas (2), (3), (7) y (8), positivos y significativamente distintos de cero; lo que indica que mientras mayor es la cuota cruzada, mayor es el valor esperado de contenido intrarregional del coeficiente técnico. La estimación del parámetro γ, que representa la elasticidad de los coeficientes intrarregionales a los nacionales también es positiva y se ubica entre 0.97 y 0.98, significativamente distinta de cero y muy cercana a la unidad, como en el modelo original de Flegg.

Finalmente, en los modelos donde en lugar de usar el CIQ empleamos por separado las cuotas de localización simples del vendedor y del comprador, éstas son significativamente distintas de cero y tienen los signos correctos; es decir mientras más grande es el vendedor y menor es el comprador, mayor será

el coeficiente intrarregional. Llama la atención que, en todos los casos, siempre es mayor el coeficiente del SLQ del vendedor y es aproximadamente el doble del valor absoluto del del comprador, además la suma de ambas da una estimación muy cercana a la que ocurre cuando usamos el CIQ.

La tabla 4 presenta los contrastes empíricos de las hipótesis que asume el modelo de Flegg y que presentamos en secciones anteriores, específicamente que $\beta = 1 \,\&\, \gamma = 1$, en la especificación (4), y $\beta_V = 1 \,\&\, \beta_C = -1 \,\&\, \gamma = 1$ en la (5). Presentamos las pruebas de Wald, primero por separado para los coeficientes y después en forma conjunta. En las pruebas individuales utilizamos el estadístico [t]; mientras que en las que se involucra más de un parámetro, el estadístico [F] de la prueba de Wald. Nótese que todas las pruebas de hipótesis son lineales.

Tabla 4
Pruebas de hipótesis del modelo de Flegg

	Muestra con observaciones donde CIQ<1				Muestra con observaciones donde FLQ<1			
Hipótesis	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(7)**	**(8)**	**(9)**	**(10)**
β=1 (t)	-25.9234***	-22.01654***			-28.91422***	-37.38124***		
γ=1 (t)		-7.802476***		-4.913182***		-4.417648***		-4.463084***
β=1 & γ=1 (F)		356.4873***				788.4463***		
βv=1 (t)			-20.18494***	-16.66638***			-22.3259***	-20.92991***
βc= -1 (t)			40.42627***	35.46514***			47.50338***	47.5616***
βv=1 & βc= -1 (F)			1039.813***	911.616***			1410.429***	1441.596***
βv=1 & βc= -1 & γ=1 (F)				685.4842***				962.7631***

Nota: ***p<0.01, **p<0.05, *p<0.1
Fuente: elaborado por los autores con información del Eurostat

Todas las hipótesis que se probaron se rechazan al 1%, es decir la evidencia no es consistente con que la elasticidad de la cuota cruzada ni la de los coeficientes técnicos nacionales sean 1, tampoco con que las elasticidades de las cuotas simples de localización del vendedor y del comprador sean simultáneamente 1 y -1.

En la formulación originaria del modelo de Flegg las elasticidades de las cuotas cruzadas y de los coeficientes técnicos se encuentran restringidos, ¿Qué tanta precisión se gana al liberar los coeficientes y no restringirlos? Esta cuestión puede ser respondida al comparar las medidas de bondad de ajuste de la columna (1), que corresponde al modelo de Flegg original, contra las medidas expresadas de la columna (2) a la (5), que no asume que se cumplan los supuestos del modelo de Flegg[7] (tabla 2). Al liberar los parámetros, la R2

[7] Nos concentramos solo en la tabla 2 porque en todas las estimaciones la muestra es la misma, razón por la que son comparables. En la tabla 3 las muestras varían en cada

ajustada aumenta y el criterio de Schwarz disminuye, el mejor modelo de acuerdo con estos criterios es el que emplea el CIQ y los coeficientes técnicos nacionales (columna 3). La ganancia en el ajuste es de solo un punto porcentual y medio, con el costo de tener que estimar 3 parámetros en lugar de solo 1. En nuestro caso, con la muestra tan grande que tenemos ese costo es ínfimo, pero en la mayoría de los casos donde se aplica el método de Flegg, los datos son realmente escasos.

Conclusiones

Planteamos un modelo de determinación de coeficientes técnicos intrarregionales al estilo Flegg, pero liberando las elasticidades de las cuotas cruzadas y de los coeficientes técnicos nacionales, o incluso introduciendo los coeficientes simples de localización del vendedor y del comprador en lugar de la cuota cruzada. El propósito es contrastar si se cumplen las premisas básicas del modelo de Flegg en lo general, que son: a) el coeficiente delta es positivo; b) a mayor cuota cruzada o coeficiente técnico nacional, el coeficiente intrarregional es mayor, y las elasticidades de estas variables son 1; c) a mayor cuota simple del vendedor y menor del comprador, el coeficiente intrarregional es mayor, y sus elasticidades son 1 y -1 respectivamente. Para este ejercicio tomamos la matriz insumo-producto EU17 como la matriz nacional y tomamos las matrices de nueve países de este grupo como regiones. Estimamos los modelos mediante mínimos cuadrados no lineales, y con una variante iterativa para actualizar la muestra relevante con cada conjunto de parámetros estimados.

Los resultados son mixtos, por una parte, la evidencia es consistente con los signos de las variables o el sentido de las relaciones, es decir los coeficientes intrarregionales en promedio son mayores si las cuotas cruzadas, las simples del vendedor y los coeficientes técnicos nacionales aumentan, y son menores si la cuota simple del comprador aumenta. Sin embargo, en todos los casos, los supuestos puntuales sobre las elasticidades se rechazan. Llama la atención que la estimación de la cuota cruzada es de alrededor de 0.5, y que cuando se introducen por separado las cuotas simples del vendedor y del comprador, la del primero es siempre alrededor de dos veces el valor absoluto de la segunda, y si se suman se obtiene un número cercano a 0.5. Aun así, no encontramos un aumento importante en la precisión de la estimación de los coeficientes intrarregionales, de acuerdo con las diferentes medidas de ajuste que empleamos.

estimación, en la columna (7) hay 19,390 pero aumenta en las siguientes hasta alcanzar en la (10) más de 27 mil. Por tal razón, la suma de cuadrado de los errores aumenta en lugar de disminuir al liberar coeficientes. Aun así, las R2 ajustadas y el criterio de Schwarz son muy cercanos e incluso ligeramente mejores para el modelo de Flegg original.

En conclusión, aun y cuando no se cumplen los supuestos numéricos de las elasticidades de las variables del modelo de Flegg, sí se corrobora el sentido lógico de las variables, importante en la determinación de los coeficientes intrarregionales al explicar alrededor de la mitad de la variabilidad en los mismos, y su capacidad predictiva es en general muy parecida a la de los modelos más generalizados, pero que requieren la estimación de más de un parámetro. Creemos que, en el balance, el método de Flegg sale bien librado del contraste empírico que realizamos.

Aun así, las estimaciones de los modelos más generalizados dejan dos hechos estilizados en nuestra muestra, mismos que podrían dar lugar a desarrollos de métodos posteriores de regionalización de matrices insumo-producto. El primero de ellos es que la elasticidad de la cuota cruzada es significativamente menor a uno, la mitad en nuestro ejercicio, lo que sugiere una relación no lineal interesante, el ajuste en los coeficientes intrarregionales ante un cambio en la cuota cruzada debe ser mayor cuando esta es pequeña y menor cuando tienda a uno. El segundo resultado es que, al parecer, el impacto de la cuota simple del vendedor es más importante que la del comprador.

Ciertamente no podemos generalizar estos resultados, menos aun cuando trabajamos con una muestra de países en lugar de información subnacional. En este sentido, creemos que es necesario llevar a cabo más contrastes, especialmente en los casos donde se cuente con matrices insumo-producto subnacionales recabadas con métodos directos.

Referencias

[1] Ayala, E. y Chapa, J., 2019. Demanda agregada y desigualdad regional por género en México. *Cuadernos de Economía*, XXXVIII, Julio-Diciembre, 399-424.

[2] Ayala, E., Chapa, J. y Treviño, L., 2015. Análisis estructural de la región petrolera del Golfo-Sureste de México, en un contexto interregional, *Equilibrio Económico, 11* (2), 135-168.

[3] Ayala, E., Chapa, J., Treviño, L., Matteo, G. y Pérez, F., 2015. *Efectos regionales del libre comercio: el caso del noreste de México*. Pearson, Ciudad de México.

[4] Barro, R. J. y Sala-I-Martin, X., 1992. Convergence, *Journal of Political Economy, 100* (2), 223-251.

[5] Bonfiglio, A., 2009. On the parametrization of techniques for representing regional economic structures. *Economic Systems Research, 21* (2), 115-127.

[6] Bonfiglio, A. y Chelli, F., 2008. Assessing the behavior of non-survey methods for constructing regional Input-Output tables through a Monte Carlo simulation. *Economic Systems Research, 20* (3), 243-258.

[7] Cappelen, A., Castellacci, F., Fagerberg, J., y Verspagen, B., 2003. The Impact of EU Regional Support on Growth and Convergence in the European Union. *JCMS, 41*(4), 621-44.

[8] Chapa, J. y Ayala, E., 2018. *Valoración del trabajo y equidad de género en México*. Pearson, Ciudad de México.

[9] Dávila, A. y Valdés, M., 2012. Jalisco: Modelos de producción insumo-producto 2003-2008. *Econoquantum, 10*(2), 99-133.

[10] Dávila, A., 2015. *Modelos interregionales de insumo-producto de la economía mexicana*. Universidad Autónoma de Coahuila y Miguel Ángel Porrúa, Ciudad de México.

[11] Dávila, A., 2019. *Modelos económicos de las regiones de México*. Universidad Autónoma de Coahuila y Miguel Ángel Porrúa, Ciudad de México.

[12] Espositi, R., y Bussoletti, S., 2008. Impact of Objetive 1 Funds on Regional Growth Convergence in the European Union: A Panel-data Approach. *Regional Studies, 42*(2), 159-173, March 2008.

[13] Eurostat (2013), National Accounts ESA, Input-Output Tables 2010.

[14] Flegg, A., Webber, C. and Elliot, M., 1995. On the appropriate use of location quotients in generating Input-Output tables. *Regional Studies, 29*, 547-561.

[15] Flegg, A., y Webber, C., 1997. On the appropriate use of location quotients in generating Input-Output tables: Reply. *Regional Studies, 31*, 795-805.

[16] Flegg, A., y Webber, C., 2000. Regional size, regional specialization and the FLQ formula. *Regional Studies, 34* (6), pp. 563-569.

[17] Flegg, A. y Thomo, T., 2011. Regional Input-Output tables and the FLQ formula: a case study of Finland". *Regional Studies, 47*, 703-721.

[18] Flegg, A. y Thomo, T., 2016a. Estimating regional input coefficients and multipliers: the use of the FLQ is not a gamble. *Regional Studies, 50* (2), 310-325.

[19] Flegg, A. y Thomo, T., 2016b. Refining the Application of the FLQ Formula for estimating regional input-output coefficients: An empirical study for South Korean regions. *Economics Working Paper Series*, 1605, Bristol University of West England.

[20] Flegg, A., Mastronardi, L., y Romero, C., 2015. "Evaluating the FLQ and AFLQ Formulae for Estimating Regional Input Coefficients: Evidence from the Province of Cordoba, Argentina". *Economics Working Paper Series*, 1508, Bristol University of West England.

[21] Gaytán, E. D., y del Pilar Riaño, J. (2015). Matriz de insumo-producto de la economía de Colombia: detección de efectos multiplicadores y determinación de flujos intersectoriales más relevantes. *Brazilian Geographical Journal: Geosciences and Humanities research medium, 6*(2), 49-66.

[22] Gaytán Alfaro, E.D., Mendoza Sánchez, M.A., y Vargas Sánchez, J.R., 2018. Minería y encadenamientos productivos en México: un estudio comparativo empleando modelos estatales de insumo-producto. Economía Coyuntural, 3(2), 2-32.

[23] Lamonica, G., Recchioni, M., Chelli, F. y Salvati, L., (2020) The efficiency of the cross-entropy method when estimating the technical coefficients of input–output tables, Spatial Economic Analysis, 15(1), 62-91.

[24] González Ramírez, P., de la Cruz Meraz, M.I. y Neri Guzmán, J.C., 2020. Aplicación de la técnica FLQ para la obtención de las matrices insumo-

producto en la economía mexicana. Regiones y Desarrollo Sustentable, 20(39).

[25] Jahn, M., 2017. Extending the FLQ formula: a location quotient-based interregional input–output framework. *Regional Studies, 51*(10), 1518-1529.

[26] Mardones, C., y Hernández, A. (2017). Análisis de subsidio al sector silvícola de la región del Biobío, Chile. *Madera y bosques*, 23(2), 53-68.

[27] Mastronardi, L. J., y Romero, C. A., 2012. Estimación de matrices de insumo-producto regionales mediante métodos indirectos. Una aplicación para la ciudad de Buenos Aires. *MPRA Paper*, 37006.

[28] Miller, R.E. y Blair, P.D., 2009. Input-output analysis: foundations and extensions. Cambridge university press.

[29] Ramos Ruiz, J. L., Polo Otero, J. L., y Arrieta Barcasnegras, A., 2017. Análisis insumo-producto y la inversión pública: una aplicación para el Caribe colombiano. *Cuadernos de Economía, 36*(70), 137-167.

[30] Romero, C.A., Mastronardi, L.J., y Faye, M.J., 2012. "Análisis de coeficientes de localización. El caso de la provincia de Córdoba [Location quotient analysis. The case of Cordoba state]," MPRA Paper 36997, University Library of Munich, Germany.

[31] Sanabria-Bautista, C. F., Cely- Acero, J.P., 2018. Análisis del insumo-producto: una aplicación para la economía boyacense. *Vestigium Ire., 12*(2), 53- 68.

[32] Temursho, U., Oosterhaven, J. y Cardenete, M.A., (2021) A multi-regional generalized RAS updating technique, Spatial Economic Analysis, 16(3), 271-286.

[33] Torre Cepeda, L. E., Alvarado Ruiz, J. A., y Quiroga Treviño, M. (2017). Matrices insumo-producto regionales: una aplicación al sector automotriz en México (No. 2017-12). Working Papers.

[34] Thomo, T., 2004. New developments in the use of location quotients to estimate regional input-output coefficients and multipliers. *Regional Studies, 38* (1), 43-54.

[35] Vera Vázquez, R. y Langle Flores, M.A., 2019. Flexibilización del modelo de insumo-producto para determinar interdependencias productivas en la ciudad fronteriza de Reynosa, Tamaulipas, 2013. Estudios fronterizos, 20.

Ensayos Revista de Economía de la Universidad Autónoma de Nuevo León, volumen cuarenta y uno, número dos, se terminó de imprimir el primero de noviembre del año dos mil veintidos en los talleres de Serna Impresos, S.A. de C.V., Vallarta 345 Sur, Monterrey, Nuevo León, México, C.P. 64000.
El tiraje consta de 30 ejemplares.

Ensayos Revista de Economía es una revista arbitrada que publica artículos de investigación inéditos de alto rigor académico en los campos de la economía aplicada y teórica, la estadística y las ciencias sociales afines. Se publican trabajos en español e inglés dos veces al año, enero y julio. Está indexada en EconLit (*American Economic Association*), SciELO México, Sistema de Clasificación de Revistas Mexicanas de Ciencia y Tecnología (CRMCyT) del Consejo Nacional de Ciencia, Humanidades y Tecnología (CONAHCYT), CLASE, Latindex, SciELO y puede consultarse en la base de datos Fuente Académica Premier™ de EBSCO y en *RePEc (Research Papers in Economics)*.

Instrucciones para autores:

- Los trabajos deben corresponder a investigaciones concluidas que planteen claramente una hipótesis.
- Se dará preferencia a los trabajos que empleen un modelo teórico matemático como soporte o una metodología estadística/econométrica que someta a prueba la hipótesis.
- Los artículos deben enviarse acompañado de una carta firmada por el autor o los autores declarando que posee(n) los derechos de autor, que el trabajo es inédito y original, y que no está sometido, ni en proceso, para su publicación total o parcial en otra revista especializada o libro.
- El autor o los autores debe(n) enviar una copia de su currículum vitae.
- Los artículos pueden redactarse en inglés o español; sin embargo, el título, el resumen y las palabras clave deben presentarse en ambos idiomas.
- El resumen no excede las 150 palabras e incluye los códigos de clasificación JEL después del resumen.
- El título del trabajo debe ser claro y breve (máximo 10 palabras).
- Los manuscritos deben enviarse en formato compatible con Microsoft Word, con una extensión máxima de 45 cuartillas, interlineado de 1.5, y fuente Times New Roman tamaño 12.
- Las gráficas y cuadros deben enviarse en formato Excel. No se deben incluir gráficas o cuadros en formato de imagen.
- La sección de referencias incluye únicamente los trabajos citados en el texto, ordenados alfabéticamente y siguiendo el formato establecido para citar artículos, libros, capítulos de libros, informes técnicos, tesis, entre otras fuentes de información. Las instrucciones de citación están disponibles en la página de la revista.
- Los artículos deben enviarse de forma electrónica a través de la página de la revista: http://ensayos.uanl.mx. Para ello, el autor debe registrarse en la página como usuario y seguir los cinco pasos para nuevos envíos.

Ensayos Revista de Economía is a peer-reviewed journal that publishes original research articles of high academic rigor in the fields of applied and theoretical economics, statistics, and related social sciences. The journal publishes works in both Spanish and English twice a year, in January and July. It is indexed in EconLit (*American Economic Association*), SciELO Mexico, *Clasificación de Revistas Mexicanas de Ciencia y Tecnología* (CRMCyT) of the *National Council of Science, Humanities, and Technology* (CONAHCYT), CLASE, Latindex, SciELO, and can also be accessed through the *Fuente Académica Premier*™ database by EBSCO and *RePEc* (*Research Papers in Economics*).

Author guidelines:

- The papers must correspond to completed research that clearly states a hypothesis.
- Preference will be given to papers that employ a supporting mathematical theoretical model or a statistical/econometric methodology that tests the hypothesis.
- Articles must be accompanied by a signed letter from the author(s) declaring ownership of the copyright, originality of the work, and that is not under review or in process for full or partial publication in another specialized journal or book.
- The author(s) must send a copy of their curriculum vitae.
- Articles may be written in English or Spanish; however, the title, abstract, and keywords must be presented in both languages.
- The abstract must not exceed 150 words, and should include JEL classification codes after the abstract.
- The article title should be clear and concise (maximum of 10 words).
- Manuscripts must be submitted in a Microsoft Word compatible format, with a maximum length of 45 pages, 1.5 line spacing, and Times New Roman font, size 12.
- Graphs and tables must be submitted in Excel format. Graphs or tables in image format are not accepted.
- The reference section should include only works cited in the text, listed alphabetically and following the citation format for articles, books, book chapters, technical reports, theses, and other sources. Citation guidelines are available on the journal's website.
- Articles must be submitted electronically through the journal's website: https://ensayos.uanl.mx. Authors must register as users and follow the five steps for new articles.

ENSAYOS

Revista de Economía